

Формула Максвелла-Мора

В предыдущих разделах курса "Сопротивление материалов" перемещения находились путем решения дифференциальных уравнений. Но во многих случаях в практических целях достаточно найти перемещения только в конкретных точках конструкции по фиксированным направлениям. Эту задачу позволяет решить метод Максвелла-Мора, предложенный в 1864 г. английским физиком Максвеллом для ферм, вторично открытый в 1874 г. немецким ученым Мором и в дальнейшем развитый на общий случай деформаций стержневой системы. Он основывается на использовании принципа возможных перемещений.

Рассмотрим вывод формулы Максвелла-Мора на примере плоской стержневой системы (рис. 1). Необходимо найти линейное перемещение точки С по направлению n - n (проекцию полного перемещения CC_1 на направление n - n), которое обозначим Δ_{np} .

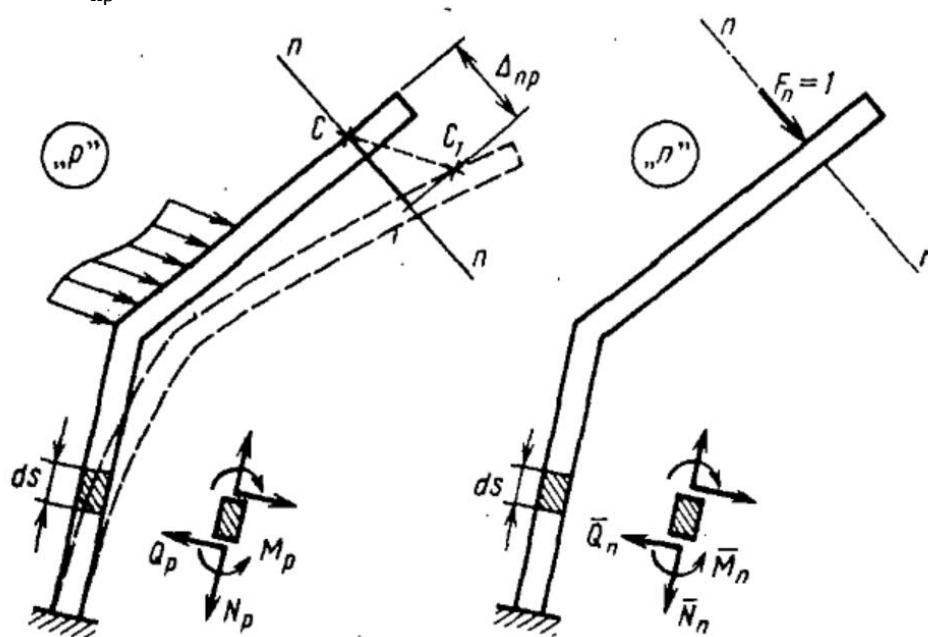


Рис. 1. Грузовое и вспомогательное ("единичное") состояние в методе Максвелла-Мора.

На рис. 1 показаны два состояния упругой конструкции. В первом состоянии, которое обозначим индексом "r" и назовем "грузовым", конструкция загружена произвольными нагрузками. Во втором, которое первоначально обозначим индексом "n", а затем назовем "единичным", конструкция загружена силой F_n , действующей по направлению искомого перемещения. На рис. 1 отдельно показан элементарный элемент стержня ds с действующими на него внутренними усилиями (продольная и поперечная силы N , Q и изгибающий момент M) с соответствующими индексами.

В грузовом состоянии заданными считаются деформации отдельных бесконечно малых элементов стержневой системы. На рис. 2 это будут деформации удлинения Δds_p , изгиба $d\phi_p$ и сдвига $\gamma_p ds$, вызывающие элементарные перемещения $d\Delta_{np}$. Если эти деформации являются упругими, то с внутренними силами N_p , Q_p и M_p они связаны известными соотношениями

$$\Delta ds_p = \frac{N_p ds}{EA}; \quad d\varphi_p = \frac{M_p ds}{EJ}, \quad \gamma_p = \frac{kQ_p}{GA}, \quad (1)$$

где k – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений в сечении при изгибе.

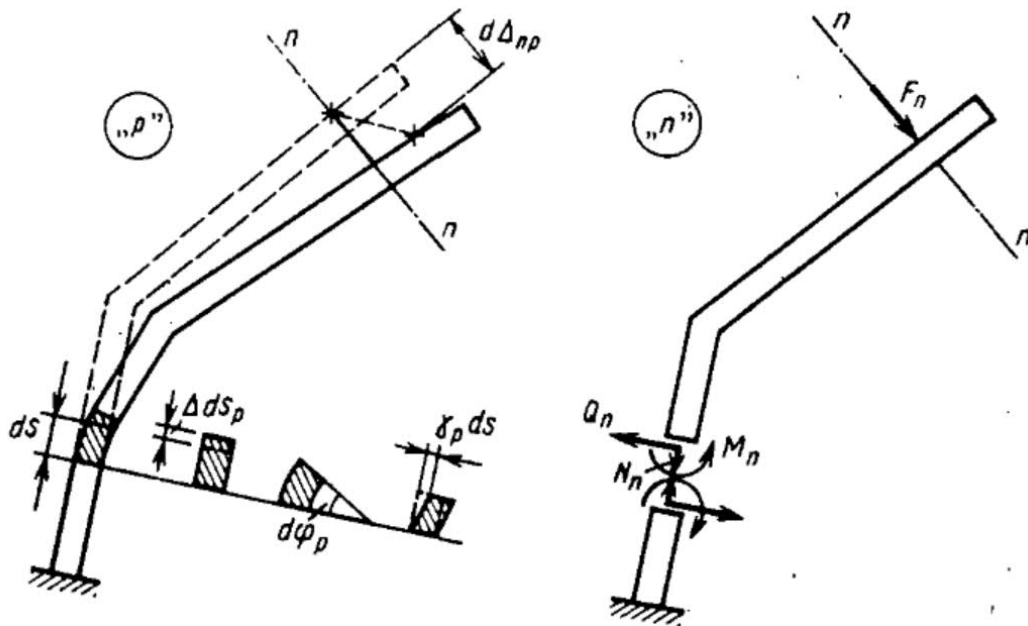


Рис. 2. Определение элементарного перемещения $d\Delta_{np}$, вызванного деформацией одного элемента ds .

Если найдем элементарное перемещение $d\Delta_{np}$, то полное перемещение получим как определенный интеграл по всей длине стержней L :

$$\Delta_{np} = \int_0^L d\Delta_{np} \quad (2)$$

Для определения $d\Delta_{np}$ используем вспомогательное состояние "n", которое получается от загрузки системы силой F_n , прикладываемой по направлению искомого перемещения Δ_{np} .

Вспользуемся известным из курса теоретической механики принципом возможных перемещений: для системы сил, находящейся в равновесии, суммарная работа этих сил на любых возможных перемещениях (т.е. бесконечно малых перемещениях, допускаемых наложенными на систему связями) равна нулю.

Применим этот принцип для определения элементарного перемещения $d\Delta_{np}$, возникшего в состоянии "p" от деформаций только одного элемента ds (рис. 2). Там же в состоянии "n" показаны внешняя сила F_n и уравнивающие ее внутренние силы N_n , Q_n , M_n , которые представим в виде

$$N_n = F_n \cdot n; \quad Q_n = F_n \cdot q; \quad M_n = F_n \cdot m, \quad (3)$$

где n , q , m "единичные" эпюры, получаемые при загрузке конструкции безразмерной силой $F_n=1$.

В теоретической механике принцип возможных перемещений формулируется для твердых тел. На рис. 2 в состоянии "n" деформируемая часть

Лекция №2. Формула Максвелла-Мора

материала элемента ds мысленно удалена и заменена воздействием внутренних сил N_n, Q_n, M_n на соседние части стержня, рассматриваемые при применении принципа как твердые.

Ввиду малости перемещений в состоянии "р" примем их на рис. 2 в качестве возможных для сил состояния "п". Возможная работа этих сил вычисляется как произведение (с соответствующим знаком) усилия, взятого из состояния "п", на соответствующее перемещение из состояния "р". В результате получим

$$F_n d\Delta_{np} - N_n \Delta ds_p + M_n d\phi_p + Q_n \gamma_p ds \approx 0, \quad (4)$$

откуда, разделив все на F_n и учтя (3), найдем

$$d\Delta_{np} = n \Delta ds_p + m d\phi_p + q \gamma_p ds. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (2), получим формулу Максвелла-Мора для перемещения Δ_{np} при заданных деформациях $\Delta ds_p, d\phi_p, \gamma_p$ (произвольной формы):

$$\Delta_{np} = \int_0^L n \Delta ds_p + \int_0^L m d\phi_p + \int_0^L q \gamma_p ds. \quad (6)$$

В частном случае для упругих деформаций (1) эта формула имеет вид

$$\Delta_{np} = \int_0^L \frac{n N_p}{EA} ds + \int_0^L \frac{m M_p}{EJ} ds + \int_0^L \frac{k q Q_p}{GA} ds. \quad (7)$$

Таким образом, задача определения перемещений точек системы сводится к построению эпюр внутренних усилий в грузовом и единичном состояниях и последующему вычислению соответствующих интегралов в формуле (7), называемых интегралами Мора.

При расчете ферм в формуле (7) оставляют только первое слагаемое, при расчете балок обычно используют только второе слагаемое. При определении линейных перемещений в единичном состоянии систему загружают безразмерной единичной силой, действующей в направлении искомого перемещения. При нахождении угла поворота поперечного сечения его в единичном состоянии загружают безразмерной единичной парой сил.

Если значение перемещения, найденное по формуле (7), положительное, то искомое перемещение направлено по направлению единичной нагрузки, если – отрицательное, то против направления единичной нагрузки.

Размерность единичных эпюр n, q, m получается из размерности аналогичных обычных эпюр делением их на размерность силы при нахождении линейных перемещений и на размерность момента при определении угловых перемещений.

Операция по вычислению интегралов Мора в (7) условно называется "перемножением эпюр". Для её выполнения удобно пользоваться правилом Верещагина.

Правило Верещагина для перемножения эпюр

Это правило было предложено А.К. Верещагиным в 1924 г., который в то время был студентом второго курса Московского института инженеров транспорта.

Лекция №2. Формула Максвелла-Мора

В сопротивлении материала и в строительной механике при решении конкретных задач часто возникает необходимость вычисления определённого интеграла вида

$$j = \int_a^b f(x)F(x)dx, \quad (8)$$

где функции $f(x)$ и $F(x)$ представлены в графическом виде как эпюры.

Пусть одна из эпюр, например $f(x)$, является на рассматриваемом участке $a-b$ линейной. В этом случае, обозначив $Fdx=d\Omega$ и представив $f=xtg(\alpha)$, получим

$$j = \int_a^b f(x)F(x)dx = tg(\alpha) \int_a^b x d\Omega = S_y tg(\alpha), \quad (9)$$

где S_y - статический момент площади Ω криволинейной эпюры $F(x)$ относительно оси y .

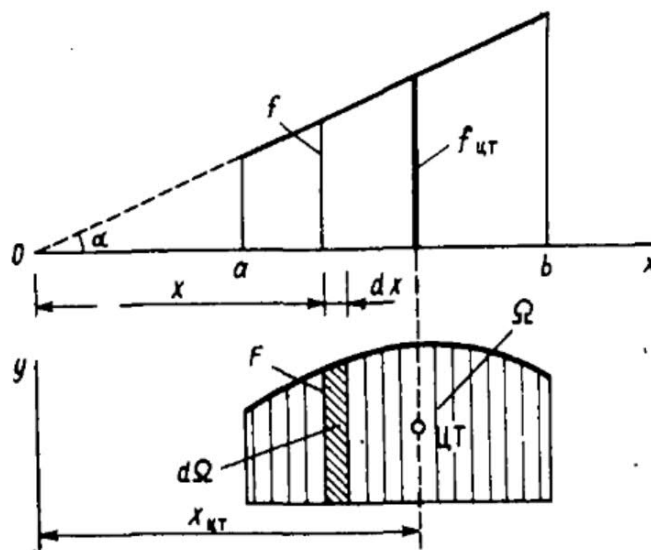


Рис. 3.

Подставив сюда значение $S_y = \Omega x_{ct}$, где x_{ct} - координата центра тяжести площади Ω , и, заменив $x_{ct}tg(\alpha)=f_{ct}$, окончательно получим формулу Верещагина в виде

$$j = \int_a^b f(x)F(x)dx = \pm \Omega f_{ct}. \quad (10)$$

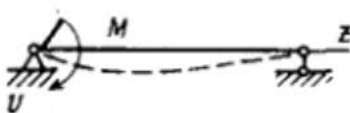
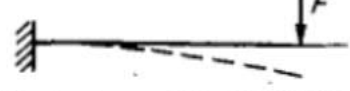
Знак минус в формуле (10) берут, если перемножаемые эпюры имеют разный знак или при перемножении эпюр моментов, отложенных со стороны рамтанутого волокна, если они отложены по разные стороны от стержня.

Вывод: Результат произведения двух эпюр, первая из которых произвольная, а вторая линейная, равен произведению площади первой эпюры (нелинейной) на ординату второй (линейной) эпюры, взятую под центром тяжести первой (нелинейной) эпюры.

Литература

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов.
2. Смирнов А.Ф. Сопротивление материалов.
3. Беляев Н.М. Сопротивление материалов.

Примеры.

№	Схема	Характерный прогиб	Угол поворота
1		$v\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$	$\varphi(0) = -\varphi(l) = -\frac{ql^3}{24EJ}$
2		$v\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{Ml^2}{16EJ}$	$\varphi(0) = \frac{Ml}{3EJ};$ $\varphi(l) = -\frac{Ml}{6EJ}$
3		$v(l) = -\frac{ql^4}{8EJ}$	$\varphi(l) = -\frac{ql^3}{6EJ}$
4		$v(l) = -\frac{Fl^3}{3EJ}$	$\varphi(l) = -\frac{Fl^2}{2EJ}$
5		$v(l) = -\frac{Ml^2}{2EJ}$	$\varphi(l) = -\frac{Ml}{EJ}$