

Методы решения плоской задачи теории упругости

Основные уравнения плоской задачи

Уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (0.1)$$

Условия равновесия на поверхности тела

$$\left. \begin{aligned} l\sigma_x + m\tau &= p_x; \\ l\tau + m\sigma_y &= p_y, \end{aligned} \right\} \quad (0.2)$$

Геометрические уравнения (Коши)

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (0.3)$$

Из шести уравнений совместности деформаций Сен-Венана в плоской задаче остается только одно:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (0.4)$$

Закон Гука в прямой форме (плоское напряженное состояние)

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y); \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (-\mu \sigma_x + \sigma_y); \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau}{G} \end{aligned} \right\} \quad (0.5)$$

Закон Гука в обратной форме

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\mu \epsilon_x + \epsilon_y); \\ \tau &= G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (0.6)$$

Для плоской деформации в уравнениях (0.5) и (0.6) необходимо упругие постоянные E и μ заменить на следующие

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E/(1 - \mu^2), \\ \mu_1 &= \mu/(1 - \mu) \end{aligned} \right\} \quad (0.7)$$

1. Решение в перемещениях.

Рассмотрим пластину с заданной поверхностной $\vec{p}^T = [p_x, p_y]$ и объемной нагрузкой $\vec{g}^T = [X, Y]$. Выберем, согласно методу перемещений, в качестве основных неизвестных функций перемещений $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$. Для их определения имеем два уравнения равновесия (0.1) в которых напряжения надо выразить через перемещения. Используя закон Гука в обратной форме, выразим в равенствах (0.6) деформации $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ через перемещения с помощью геометрических уравнений Коши (0.3). В результате получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \tau &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

После подстановки этих выражений в дифференциальные уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \right\}$$

окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} E_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (G + \mu E_1) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + X &= 0; \\ E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (G + \mu E_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + Y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $E_1 = E/(1 - \mu^2)$; $G = E/(2(1 + \mu))$.

Подставляя (1) в условия на поверхности

$$\left. \begin{aligned} l\sigma_x + m\tau &= p_x; \\ l\tau + m\sigma_y &= p_y. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

получим их выражения через перемещения.

2. Решение в напряжениях.

Решение плоской задачи в напряжениях сводится к отысканию трех неизвестных функций $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ и $\tau_{xy}(x, y)$. Для этого имеются два дифференциальных уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (4)$$

заменяв в нем деформации на напряжения с помощью закона Гука для плоского напряженного состояния (5)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \nu \sigma_y)/E; \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y - \nu \sigma_x)/E; \\ \gamma_{xy} &= 2(1 + \nu) \tau_{xy}/E. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4) после упрощения получим

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (a)$$

Исключим из этого уравнения касательное напряжение τ_{xy} . Для этого первое уравнение равновесия продифференцируем по x , а второе — по y , и почленно сложим. Считая объемные силы постоянными, найдем

$$-2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}.$$

Подставив это соотношение в уравнение (a), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

или короче

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (6)$$

Таким образом, сумма нормальных напряжений в плоской задаче есть гармоническая функция. Это условие носит название *уравнения Леви* и выведено для обобщенного плоского напряженного состояния. Оно не содержит упругих постоянных и поэтому в случае плоской деформации имеет такой же вид.

Следовательно, решение плоской задачи теории упругости при постоянстве объемных сил сведено к интегрированию трех уравнений: двух уравнений равновесия (3) и уравнения неразрывности деформаций (6) при обязательном удовлетворении условий на поверхности.

Решение плоской задачи можно упростить, сведя ее к отысканию одной функции $\varphi(x, y)$, называемой *функцией напряжений Эри*. Ее выбирают с таким расчетом, чтобы дифференциальные уравнения равновесия (3) обращались в тождества. Эти условия будут удовлетворены, если напряжения выразить через функцию Эри следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Действительно, подставляя эти выражения в уравнения равновесия (3), получаем тождества, т. е. принятая функция напряжений $\varphi(x, y)$ является решением этих уравнений.

Подставляя теперь напряжения (7) в уравнение неразрывности деформаций (6), находим

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (6)$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет собой оператор Лапласа над функцией $\varphi(x, y)$. Поэтому уравнение (6) может быть представлено с помощью оператора Лапласа так:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0,$$

или

$$\nabla^4 \varphi = 0. \quad (в)$$

Левая часть последнего уравнения читается как «набла четыре ф» и называется двойным оператором Лапласа над функцией φ . Функция, подчиняющаяся уравнению (в), называется *бигармонической*, а само уравнение — *бигармоническим* уравнением. Представим его в развернутом виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Произведем дифференцирование

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (8)$$

Выразим условия на поверхности для плоской задачи (*) через функцию напряжений с помощью уравнений (7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \ell - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + Xy + Yx \right) m &= p_x, \\ - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + Xy + Yx \right) \ell + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m &= p_y. \end{aligned}$$

Итак, плоская задача теории упругости сведена к отысканию одной бигармонической функции $\varphi(x, y)$, удовлетворяющей заданным условиям на контуре.

3. **Полубратный метод Сен-Венана.** Он состоит в задании части функций напряжений или перемещений. Затем с помощью уравнений теории упругости устанавливаются зависимости, которым должны удовлетворять оставшиеся функции напряжений и перемещений. При этом дифференциальные уравнения настолько упрощаются, что решение их не представляет особых трудностей. Полубратный метод является одним из наиболее эффективных методов решения задачи теории упругости.

Этим методом Сен-Венан решил задачи об изгибе консоли силой, приложенной на конце, и балки на двух опорах под действием равномерно

распределенной нагрузки, а также о кручении стержня прямоугольного поперечного сечения.

Решение плоской задачи для прямоугольных односвязных областей

Решение в полиномах. Решение плоской задачи осуществимо полуобратным методом, если сначала задаться аналитической формой функции напряжений, удовлетворяющей бигармоническому уравнению (8), а затем определить, каким нагрузкам на контуре она соответствует. В качестве бигармонической функции можно принимать алгебраические полиномы разных степеней.

Полином первой степени $\varphi_1 = a_1x + b_1y$ как функция напряжений нас не интересует, так как напряжения, подсчитанные по формулам (7), окажутся равными нулю.

Рассмотрим функцию напряжений в виде полинома второй степени

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2. \quad (9)$$

Четвертые производные этой функции:

$$\frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^4} = 0; \quad \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial y^4} = 0,$$

и, следовательно, уравнение (8) обращается в тождество при любых значениях коэффициентов a_2, b_2, c_2 . Таким образом, полином второй степени является бигармонической функцией и может быть применен к решению плоской задачи.

Если функцию напряжений принять в виде полинома третьей степени

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2 \cdot 1} x^2 y + \frac{c_3}{1 \cdot 2} x y^2 + \frac{d_3}{2 \cdot 3} y^3, \quad (10)$$

то уравнение (8) по-прежнему будет обращаться в тождество при произвольных значениях коэффициентов a_3, b_3, c_3 и d_3 , т. е. полином третьей степени является бигармонической функцией и также может быть применен для решения плоской задачи.

Зададим функцию $\varphi(x, y)$ в виде полинома четвертой степени:

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2 \cdot 2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{2 \cdot 3} x y^3 + \frac{e_4}{3 \cdot 4} y^4. \quad (11)$$

Четвертые производные этой функции

$$\frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x^4} = 2a_4; \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x^2 \partial y^2} = c_4; \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial y^4} = 2e_4.$$

Подставляя их в бигармоническое уравнение (8), получим

$$2a_4 + 2c_4 + 2e_4 = 0,$$

откуда

$$e_4 = -a_4 - c_4. \quad (12)$$

Таким образом, не все коэффициенты полинома четвертой степени произвольны. Независимыми могут быть только четыре коэффициента, например a_4 , b_4 , c_4 и d_4 , а пятый следует взять из соотношения (12). Следовательно, для того чтобы полином четвертой степени был бигармонической функцией, он должен иметь такой вид:

$$\varphi_4 = a_4 \left(\frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{y^4}{3 \cdot 4} \right) + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + c_4 \left(\frac{x^2 y^2}{2 \cdot 2} - \frac{y^4}{3 \cdot 4} \right) + \frac{d_4}{2 \cdot 3} x y^3.$$

Рассмотрим полином пятой степени:

$$\varphi_5 = \frac{a_5}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b_5}{4 \cdot 3} x^4 y + \frac{c_5}{3 \cdot 2} x^3 y^2 + \frac{d_5}{2 \cdot 3} x^2 y^3 + \frac{e_5}{3 \cdot 4} x y^4 + \quad (13) \\ + \frac{f_5}{4 \cdot 5} y^5.$$

Четвертые производные этой функции:

$$\frac{\partial^4 \varphi_5}{\partial x^4} = 6a_5 x + 2b_5 y;$$

$$\frac{\partial^4 \varphi_5}{\partial x^2 \partial y^2} = 2c_5 x + 2d_5 y;$$

$$\frac{\partial^4 \varphi_5}{\partial y^4} = 2e_5 x + 6f_5 y.$$

Подставляя их в бигармоническое уравнение (8) и группируя слагаемые по аргументам x и y , получаем

$$2(3a_5 + 2c_5 + e_5)x + 2(b_5 + 2d_5 + 3f_5)y = 0.$$

Чтобы это уравнение обращалось в тождество при любых значениях аргументов, необходимо коэффициенты при этих переменных приравнять нулю:

$$\left. \begin{aligned} 3a_5 + 2c_5 + e_5 &= 0; \\ b_5 + 2d_5 + 3f_5 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Если независимыми принять коэффициенты a_5 , b_5 , c_5 и d_5 , то остальные два выразятся через них согласно уравнениям (14) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} e_5 &= -3a_5 - 2c_5; \\ f_5 &= -\frac{1}{3}b_5 - \frac{2}{3}d_5. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Внося коэффициенты e_5 и f_5 из соотношений (15) в формулу (13), находим

$$\varphi_5 = \frac{a_5}{5 \cdot 4} (x^5 - 5xy^4) + \frac{b_5}{4 \cdot 3} \left(x^4 y - \frac{1}{5} y^5 \right) + \quad (16) \\ + \frac{c_5}{3 \cdot 2} (x^3 y^2 - xy^4) + \frac{d_5}{2 \cdot 3} \left(x^2 y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right).$$

В такой форме полином пятой степени является бигармонической функцией и применим к решению плоской задачи.

С помощью алгебраических полиномов можно решить ряд простых задач: задачу о чистом изгибе балки, изгибе балки на двух опорах под действием равномерно распределенной нагрузки, задачу о треугольной подпорной стенке.