

Несимметричный изгиб круглых пластин. Применение одинарных тригонометрических рядов.

В общем случае несимметричного изгиба все величины зависят от двух координат: r и Θ (рис. 1).

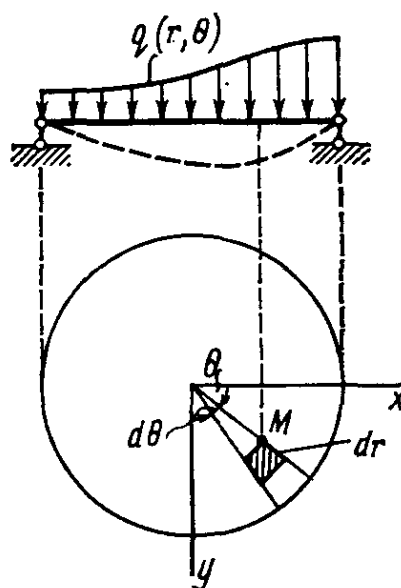


Рис. 1

Разрешающее уравнение изгиба пластины имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} \right) = \frac{q(r, \Theta)}{D}. \quad (1)$$

Граничные условия на криволинейных краях круглой пластины формулируются аналогично тому, как это рассмотрено для прямоугольной пластины. В частности, для свободной кромки при $r = R$ будем иметь два условия

$$M_r = 0 \big|_{r=R}; \quad V_r = Q_r + \frac{\partial H}{r \partial \Theta} = 0 \big|_{r=R},$$

где V_r — обобщенная поперечная сила.

В общем случае, когда нагрузка q есть произвольная функция r и Θ , т. е. $q = q(r, \Theta)$, для получения решения она разлагается в одинарный тригонометрический ряд по координате Θ :

$$q(r, \Theta) = q_0(r) + \sum_{m=1, 2, \dots}^{\infty} q_m(r) \sin m\Theta + \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} q_n(r) \cos n\Theta. \quad (2)$$

Аналогично тому, как это было для прямоугольной пластины, коэффициенты разложения (1) с учетом свойства ортогональности гармоник синуса и косинуса различных номеров получим в виде

$$\left. \begin{aligned} q_m(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(r, \Theta) \sin m\Theta d\Theta; \\ q_n(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(r, \Theta) \cos n\Theta d\Theta; \\ q_0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(r, \Theta) d\Theta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Лекция №9

Все они в общем случае являются функциями r , так как в (3) переменная Θ исчезает после интегрирования, а r остается. Величина $q_0(r)$ представляет собой среднюю нагрузку на окружность радиуса r . Отдельно взятой нагрузке $q_0(r)$ отвечает осесимметричный изгиб пластины.

Представим прогибы $w(r, \theta)$ в виде ряда

$$w(r, \theta) = w_0(r) + \sum_{m=1, 2, \dots}^{\infty} w_m(r) \sin m\theta + \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} w_n(r) \cos n\theta, \quad (4)$$

где функции $w_0(r)$, $w_m(r)$ и $w_n(r)$ подлежат определению. Подставив (2) и (4) в основное дифференциальное уравнение (1) и приравняв коэффициенты при синусах и косинусах, придем к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $w_m(r)$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 w_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_m}{dr} - \frac{m^2}{r^2} w_m \right) = \frac{q_m}{D}. \quad (5)$$

Для функций w_n уравнение имеет тот же вид.

Полагая $m=0$, приходим к уравнению осесимметричного изгиба пластины нагрузкой $q_0(r)$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_0}{dr} \right) = \frac{q_0(r)}{D},$$

Следовательно его решение таково

$$w_0 = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r + w_0(q_0). \quad (6)$$

Для $m=1$ решение уравнения (5) имеет вид

$$w_1 = C_1 r + C_2 r^3 + \frac{1}{r} C_3 + C_4 r \ln r + w_1(q_1), \quad (7)$$

а для $m=2, 3, \dots$

$$w_m = C_1 r^m + C_2 r^{m+2} + C_3 r^{-m} + C_4 r^{-m+2} + w_m(q_m). \quad (8)$$

Рассмотрим пример. Пусть на пластину, защемленную на контуре, действует нагрузка (рис. 2)

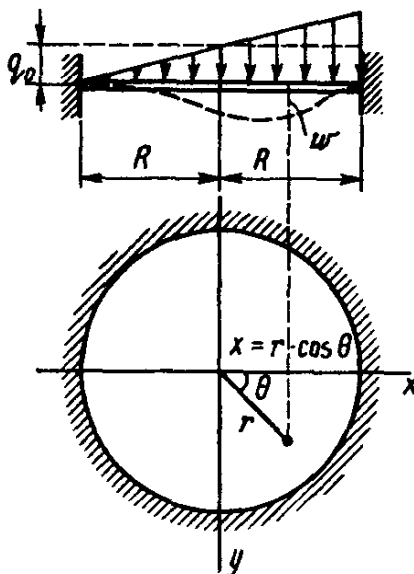


Рис. 2

$$q = q_0 + \frac{x}{R} q_0 = q_0 + \frac{r q_0}{R} \cos \theta. \quad (a)$$

Сравнивая (a) с (2), видим, что в данном примере присутствуют лишь два члена ряда: осесимметричное слагаемое q_0 и слагаемое $q_n(r) \cos n\theta$ при $n=1$ и $q_1(r) = r q_0 / R$.

Решение $w_n(r)$ для q_n (см. (12) в лекции №8)

$$W_0(r) = \frac{q_0}{64D} (R^2 - r^2)^2$$

Найдем решение $w_1(r)$ для нагрузки $q_1(r) \cos n\theta$, взяв его по (7). В этом решении C_3 и C_4 надо положить равными нулю из условия, что при $r \rightarrow 0$ прогибы $w \neq \infty$. Частное решение $w_1(q_1)$ примем

Лекция №9

в форме Ar^5 . Подставив его в (5) при $m = 1$, найдем $A = q_0/(192 RD)$. Итак, имеем

$$w_1(r) = C_1 r + C_2 r^3 + \frac{q_0}{192RD} r^5. \quad (6)$$

Для определения C_1 и C_2 используем граничные условия $w_1 = 0$ | $r=R$ и $w'_1 = 0$ | $r=R$, что дает $C_1 = q_0 R^4/(192D)$, $C_2 = -q_0 R^2/(96D)$.

Окончательно получим такое выражение для прогибов:

$$w(r, \Theta) = w_0(r) + w_1(r) \cos \Theta = \frac{q_0 R^4}{64D} \left[1 - 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right] + \\ + \frac{q_0 R^4}{192D} \left[\frac{r}{R} - 2 \left(\frac{r}{R} \right)^3 + \left(\frac{r}{R} \right)^5 \right] \cos \Theta.$$

Изгибающие и крутящие моменты выражаются через функцию $W(r, \theta)$ по формулам

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]; \\ M_\theta &= -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и

$$H = -D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \quad (10)$$

Поперечные силы по формулам

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right); \\ Q_\theta &= -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Приведенные поперечные силы (опорные реакции) задаются выражениями

$$\left. \begin{aligned} Q_r^{\text{прив}} &= -D \left[\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + (1-\nu) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]; \\ Q_\theta^{\text{прив}} &= -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w + (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$