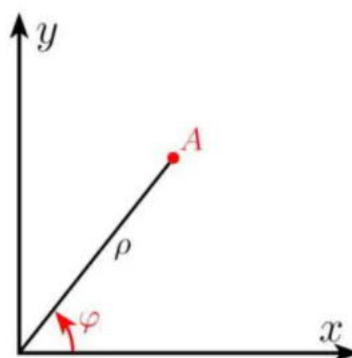


Основные уравнения изгиба круглой пластинки в полярных координатах

ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА
КООРДИНАТ

Полярная система координат — двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости однозначно определяется двумя числами — полярным углом и полярным радиусом.

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi \\y &= \rho \sin \varphi \\ \rho^2 &= y^2 + x^2\end{aligned}$$



Для решения задачи об изгибе круглой пластинки все уравнения изгиба пластинки, выведенные в декартовой системе координат, преобразуем к полярной системе. В этом случае прогиб пластинки и нагрузка являются функциями переменных r и θ , т. е. $w = w(r, \theta)$ и $q = q(r, \theta)$. Тогда основное уравнение изгиба пластинки принимает вид

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = q. \quad (1)$$

Изгибающие моменты в круглой пластинке будем обозначать так: M_r — изгибающий момент в сечении, перпендикулярном радиус-вектору r в рассматриваемой точке (радиальный изгибающий момент); M_θ — то же в сечении, совпадающем с радиус-вектором (тангенциальный изгибающий момент).

Заменяя производные функции прогибов по x и y на производные по r и θ , получаем формулы изгибающих моментов в полярной системе координат:

$$\left. \begin{aligned}M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]; \\ M_\theta &= -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right].\end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Аналогично преобразуем формулу крутящего момента

$$H = -D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \quad (3)$$

Поперечные силы обозначим следующим образом: Q_r — поперечная сила на площадке с нормалью r (радиальная поперечная сила); Q_θ — то же, на площадке, совпадающей с радиус-вектором r (тангенциальная поперечная сила).

Теория расчета пластин и оболочек (лекция №8)

Заменяя в формулах для поперечных сил производные по x и y на производные по r и θ получим выражения поперечных сил в полярной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right); \\ Q_\theta &= -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Обозначим $Q_r^{\text{прив}}$ интенсивность приведенной поперечной силы на гранях контура, перпендикулярных радиус-вектору r , а $Q_\theta^{\text{прив}}$ — на гранях, совпадающих с радиус-вектором. Тогда

после замены переменных x и y на r и θ можно получить выражения приведенной поперечной силы на контуре, учитывающей наличие крутящего момента:

$$Q_r^{\text{прив}} = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta};$$

$$Q_\theta^{\text{прив}} = Q_\theta + \frac{\partial H}{\partial r}.$$

Подставляя сюда значения поперечных сил (4) и крутящего момента (3), находим

$$\left. \begin{aligned} Q_r^{\text{прив}} &= -D \left[\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + (1-\nu) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]; \\ Q_\theta^{\text{прив}} &= -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w + (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Формулы (1) — (5) представляют собой основные уравнения изгиба пластинок в полярной системе координат. Уравнение (1) служит для определения функции прогибов срединной плоскости пластинки, а остальные — для составления граничных условий и определения усилий.

Простейшие осесимметричные задачи изгиба круглой пластинки

Задача об изгибе круглой пластинки будет осесимметричной, если нагрузка на пластинку, а также условия закрепления ее краев не зависят от полярного угла θ . В этом случае прогибы пластинки также не зависят от полярного угла θ , а являются функцией лишь координаты r , т. е. $w = w(r)$. Тогда уравнение (1) значительно упрощается:

$$D \left(\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} \right) = q. \quad (6)$$

Формулы изгибающих моментов (2) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right); \\ M_\theta &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

а крутящий момент (3) обращается в нуль.

Упрощаются и выражения поперечных сил (4):

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right); \\ Q_\theta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

а приведенные поперечные силы на контуре (5) составляют

$$Q_r^{\text{прив}} = Q_r; \quad Q_\theta^{\text{прив}} = 0.$$

Уравнение (6) можно решить в общем виде. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения w_1 и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения $\bar{w}$, т. е.

$$w = w_1 + \bar{w}. \quad (a)$$

Общее решение однородного уравнения

$$\frac{d^4 w_1}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w_1}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw_1}{dr} = 0$$

записывается так:

$$w_1 = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r.$$

Чтобы получить частное решение $\bar{w}$, уравнение (6) можно представить в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{w}}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q(r)}{D}.$$

Убедиться в правильности этого уравнения можно, выполнив дифференцирование в его левой части.

Интегрируя это уравнение последовательно четыре раза, найдем общий вид частного решения:

$$\bar{w} = \frac{1}{D} \int_0^r \frac{1}{r} \left\{ \int_0^r r \left[\int_0^r \frac{1}{r} \left(\int_0^r q(r) r dr \right) dr \right] dr \right\} dr. \quad (6)$$

Пусть нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластинки, т. е. $q(r) = q = \text{const}$. В этом случае выражение (б) легко интегрируется и приводит к следующему результату:

$$\bar{w} = \frac{qr^4}{64D}$$

Следовательно, общее решение неоднородного дифференциального уравнения (6) при равномерно распределенной нагрузке таково:

$$w = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + \frac{qr^4}{64D} \quad (9)$$

Рассмотрим некоторые примеры расчета пластинок, находящихся под действием равномерно распределенной нагрузки.

1. Слабшая шарнирно опертая по контуру пластинка (рис. 1). Для определения постоянных интегрирования имеем следующие граничные условия. В центре пластинки (при $r = 0$) прогиб должен иметь конечное значение. Так как $\ln 0 = -\infty$, то в решении (9) следует отбросить члены, содержащие множитель $\ln r$, т. е. принять

$$C_2 = C_4 = 0.$$

Тогда

$$w = C_1 + C_3 r^2 + \frac{qr^4}{64D}. \quad (в)$$

Два условия имеем на контуре пластинки, где должны обращаться в нуль прогиб w и радиальный изгибающий момент M_r . Таким образом, при $r = a$

$$w = 0 \text{ и } \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} = 0. \quad (г)$$

Подставляя в условия (г) функцию прогибов (в), получаем:

$$C_1 + C_3 a^2 + \frac{qa^4}{64D} = 0;$$

$$2C_3 + \frac{3qa^2}{16D} + \frac{\nu}{a} \left(2C_3 a + \frac{qa^3}{16D} \right) = 0,$$

откуда

$$C_3 = -\frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{qa^2}{32D};$$

$$C_1 = \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{qa^4}{32D} - \frac{qa^4}{64D}.$$

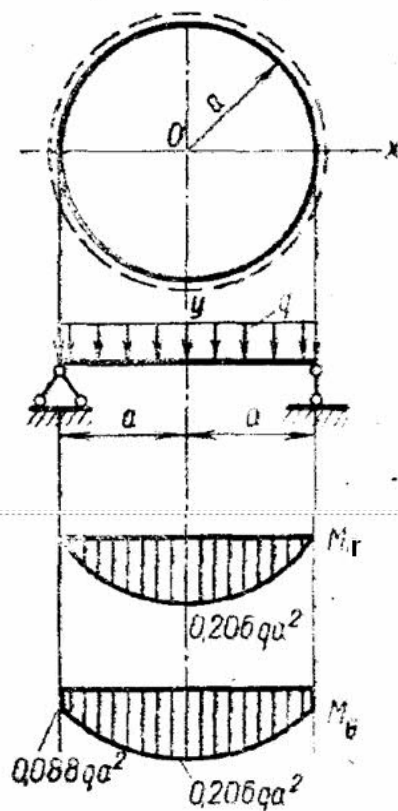


Рис. 1

Подставляя найденные постоянные в решение (в), получаем функцию прогибов для рассматриваемой пластинки:

$$w = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D} \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} a^2 - r^2 \right). \quad (10)$$

Максимальный прогиб возникает в центре пластинки (при $r = 0$):

$$\max w = \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \frac{qa^4}{64D}. \quad (д)$$

Подставляя функцию прогибов (10) в формулы (7), находим изгибающие моменты в пластинке:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= q(3 + \nu)(a^2 - r^2)/16; \\ M_\theta &= q[(3 + \nu)a^2 - (1 + 3\nu)r^2]/16. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Максимальные изгибающие моменты также возникают в центре пластинки:

$$\max M_r = \max M_\theta = qa^2(3 + \nu)/16.$$

Изгибающие моменты в точках контура (при $r = a$):

$$\begin{aligned} M_r &= 0; \\ M_\theta &= qa^2(1 - \nu)/8. \end{aligned}$$

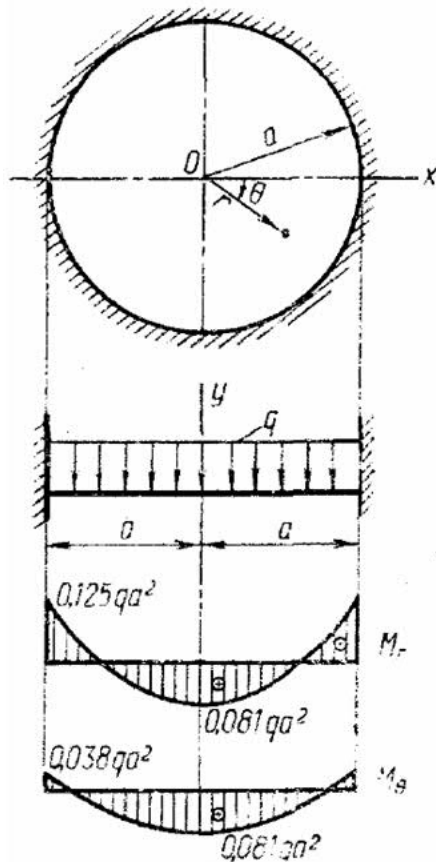


Рис. 2

Эпюры изгибающих моментов для пластинки, изготовленной из материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$, показаны на рис. 1.

2. Сплошная защемленная по контуру пластинка (рис. 2). Для определения постоянных C_1 и C_3 имеем следующие граничные условия: на внешнем контуре пластинки должны отсутствовать прогибы и повороты сечений, т. е.

$$\text{при } r = a \quad w = \frac{dw}{dr} = 0.$$

Подставляя в эти условия функцию прогибов (в), получаем:

$$C_1 + C_3 a^2 + qa^4/(64D) = 0;$$

$$2C_3 a + qa^3/(16D) = 0,$$

откуда

$$C_3 = -qa^2/(32D),$$

$$C_1 = qa^4/(64D),$$

и уравнение срединной поверхности (в) принимает вид

$$w = [q/(64D)] (a^2 - r^2)^2. \quad (12)$$

Максимальный прогиб в центре пластинки (при $r = 0$)

$$\max w = qa^4/(64D).$$

Из сравнения этого результата с формулой (д) следует, что максимальный прогиб защемленной по контуру пластинки в четыре раза меньше максимального прогиба шарнирно опертой пластинки.

Подставляя функцию прогибов (12) в формулы (7), находим изгибающие моменты:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= q[(1+\nu)a^2 - (3+\nu)r^2]/16; \\ M_\theta &= q[(1+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2]/16. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Изгибающие моменты в центре пластинки:

$$M_r = M_\theta = qa^2(1+\nu)/16;$$

на контуре:

$$M_r = -qa^2/8;$$

$$M_\theta = -\nu qa^2/8.$$

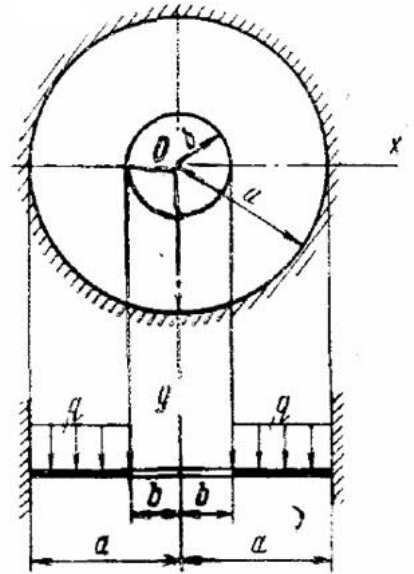


Рис. 3

Эпюры изгибающих моментов для пластинки, изготовленной из материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$, показаны на рис. 2. Максимальный по абсолютному значению изгибающий момент возникает в точках контура на площадках, перпендикулярных радиусу. Он на 40% меньше максимального изгибающего момента в шарнирно опертой пластинке.

Теория расчета пластин и оболочек (лекция №8)

3. Кольцевая пластинка с зашечленным наружным краем (рис. 3). Для определения постоянных интегрирования, входящих в решение (9), имеем следующие граничные условия: на внешнем, зашечленном краю (при $r = a$)

$$w = \frac{dw}{dr} = 0;$$

на внутреннем, свободном краю (при $r = b$)

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0$$

$$\text{и } Q_r^{\text{прив}} = Q_r = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0.$$

Подставляя в эти условия функцию прогибов (9), получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 \ln a + C_3 a^2 + C_4 a^2 \ln a + qa^4/(64D) &= 0; \\ C_2/a + 2C_3 a + 2C_4 a \ln a + C_4 a + qa^3/(16D) &= 0; \\ -C_2/b^2 + 2C_3 + 2C_4 \ln b + 3C_4 + 3qb^2/(16D) + \\ + \nu [C_2/b^2 + 2C_3 + 2C_4 \ln b + C_4 + qb^2/(16D)] &= 0; \\ 4C_4/b + qb/(2D) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему, находим:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= [qa^2/(64D\alpha)] \{ (1-\nu) a^4 - [(5-3\nu) - 4(1+\nu) \ln a] a^2 b^2 - \\ &\quad - 2[2(1+\nu) + (1-2 \ln a) \{ (1-\nu) + 4(1+\nu) \ln(b/a) \}] b^4 \}; \\ C_2 &= -[qa^3 b^2/(16D\alpha)] \{ (1-\nu) a^2 + [(1-\nu) + 4(1+\nu) \ln(b/a)] b^2 \}; \\ C_3 &= [q/(32D\alpha)] \{ -(1-\nu) a^4 + 2(1-\nu)(1+2 \ln a) a^2 b^2 + \\ &\quad + [(3+\nu) + 4(1+\nu) \ln b] b^4 \}; \\ C_4 &= -qb^2/(8D), \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

где

$$\alpha = (1-\nu) a^2 + (1+\nu) b^2.$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} \rho &= r/a, \quad \beta = b/a, \\ k &= \frac{(1-\nu) \beta^2 + (1+\nu) (1+4\beta^2 \ln \beta)}{(1-\nu) + (1+\nu) \beta^2} \beta^2, \end{aligned}$$

то уравнение срединной поверхности пластинки (9) после подстановки в него постоянных (e) примет следующий вид:

$$w = [qa^4/(64D)] \{ 1 - 1 + 2(1-k-2\beta^2)(1-\rho^2) + \rho^4 - 4k \ln \rho - 8\beta^2 \rho^2 \ln \rho \}. \quad (14)$$

Дальнейший ход расчета, т. е. определение усилий и напряжений, не представляет затруднений и производится аналогично предыдущим примерам.