

Расчет плит методом конечных разностей

Уравнение Софи Жермен

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (*)$$

Этот метод решения краевых задач для дифференциальных уравнений называют также методом сеток. Он состоит в следующем. Вся область рассматриваемого тела (область решения краевой задачи) — ось балки, площадь пластины, поверхность оболочки и т. д. — покрывается сеткой линий, точки пересечения которых называют узлами. За неизвестные принимают значения разыскиваемых функций в узлах сетки. Для этого строятся приближенные формулы для производных от функций, выраженные через узловые ординаты

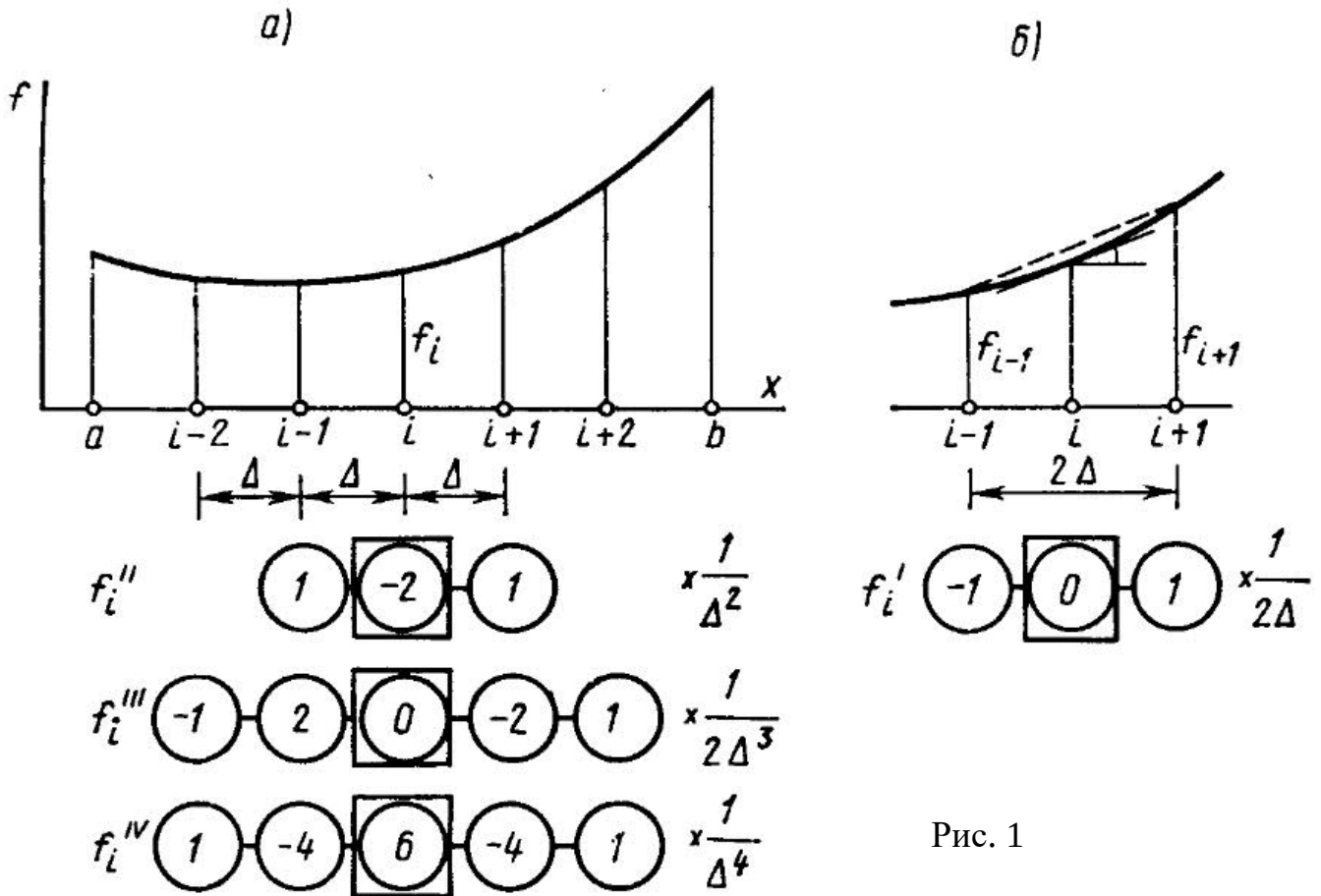


Рис. 1

Примеры шаблонов для приближенного вычисления производных. Вывод формул

$$f(x_0 + \Delta) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta + \frac{1}{2!}f''(x_0)\Delta^2 + \dots \quad (1)$$

Положим $x_0 = x_i$ и применим формулу (1) для точек $i+1$ и $i-1$:

$$\left. \begin{aligned} f_{i+1} &= f_i + f'_i\Delta + \frac{1}{2!}f''_i\Delta^2 + \frac{1}{3!}f'''_i\Delta^3 + \dots; \\ f_{i-1} &= f_i - f'_i\Delta + \frac{1}{2!}f''_i\Delta^2 - \frac{1}{3!}f'''_i\Delta^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ограничимся тремя членами ряда в (2) (что соответствует замене истинной кривой $f(x)$ квадратной параболой, проведенной через ординаты f_{i-1} , f_i и f_{i+1}). Тогда вычитая и складывая строки (2), найдем первую и вторую производные в точке i в виде

$$f'_i = \frac{-f_{i-1} + f_{i+1}}{2\Delta}; \quad (3)$$

$$f''_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta^2}. \quad (4)$$

Третью производную f'''_i можно получить, применив оператор первой производной ко второй производной f'' , значение которой в каждой узловой точке получается по оператору второй производной

$$f'''_i = \frac{d}{dx} (f'')_i = \frac{-f''_{i-1} + f''_{i+1}}{2\Delta} = \frac{-(f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i) + (f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2})}{2\Delta \cdot \Delta^2}$$

или

$$f'''_i = \frac{-f_{i-2} + 2f_{i-1} - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{2\Delta^3}. \quad (5)$$

Аналогично, применив оператор второй производной к оператору второй производной, получим формулу четвертой производной

$$f^{IV}_i = \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2}}{\Delta^4}. \quad (6)$$

Для функции двух переменных

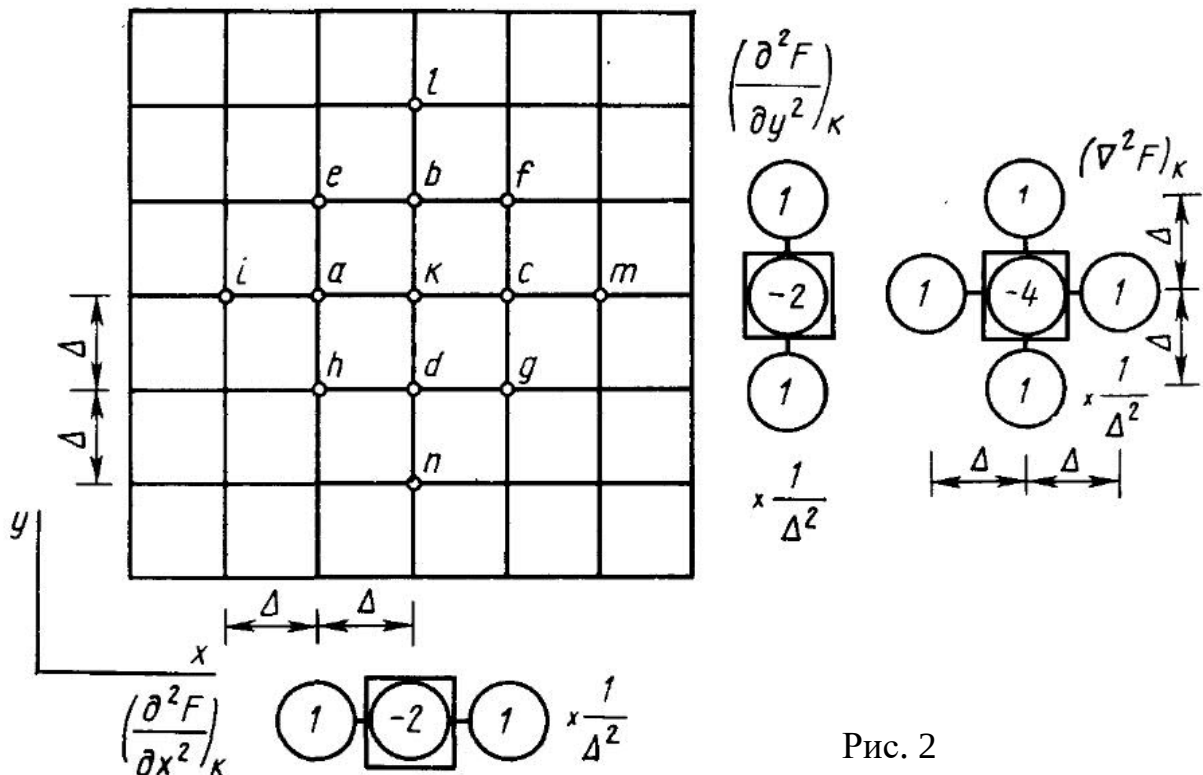


Рис. 2

Особый интерес представляет бигармонический оператор, который получим, дважды применив оператор Лапласа

$$(\nabla^2 \nabla^2 F)_k = \nabla^2 (Z)_k = \frac{Z_a + Z_b + Z_c + Z_d - 4Z_k}{\Delta^2},$$

где $Z_j = (\nabla^2 F)_j$, $j = a, b, c, d, k$. Последовательно наложив на эти точки «крест» гармонического оператора, получим слагаемые числителя искомой формулы, выраженные через ординаты F . После приведения подобных членов будем иметь

$$(\nabla^2 \nabla^2 F)_k = \frac{20F_k - 8(F_a + F_b + F_c + F_d) + 2(F_e + F_f + F_g + F_h) + (F_l + F_m + F_n + F_t)}{\Delta^4}. \quad (7)$$

Схема бигармонического оператора изображена на рис. 8.5.

Вторая смешанная производная может быть получена по схеме

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_k = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_k = \frac{-(\partial F / \partial y)_a + (\partial F / \partial y)_c}{2\Delta} = \frac{F_h - F_e + F_f - F_g}{4\Delta^2}. \quad (8)$$

Соответствующие шаблоны

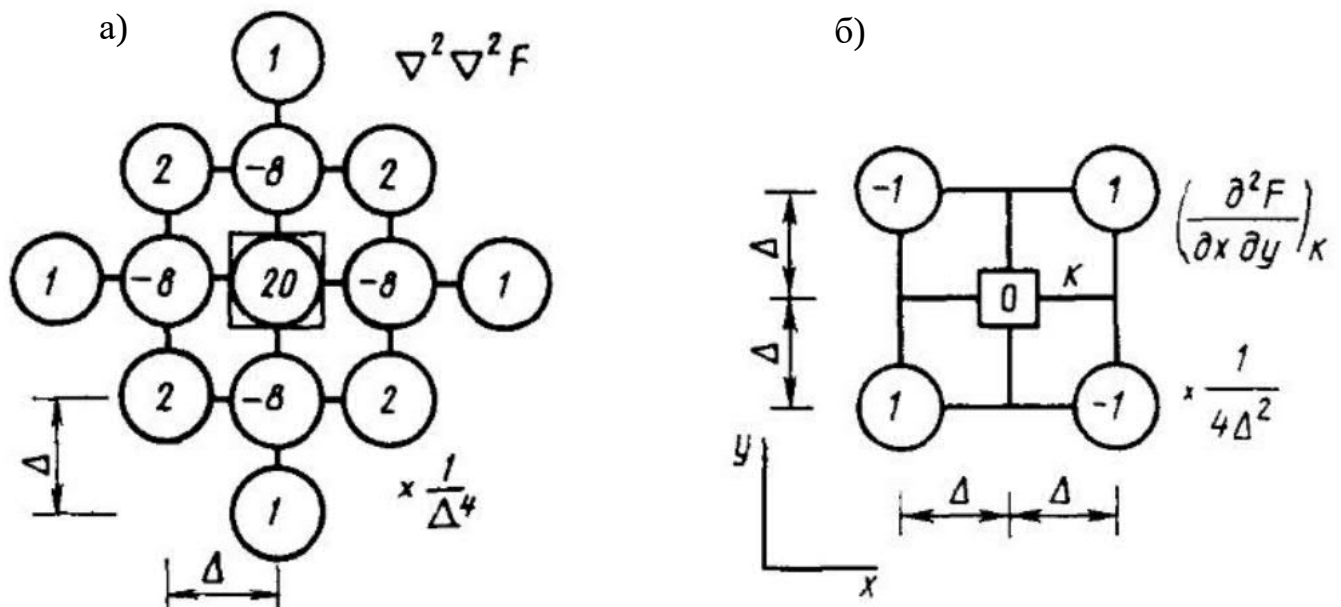


Рис. 3

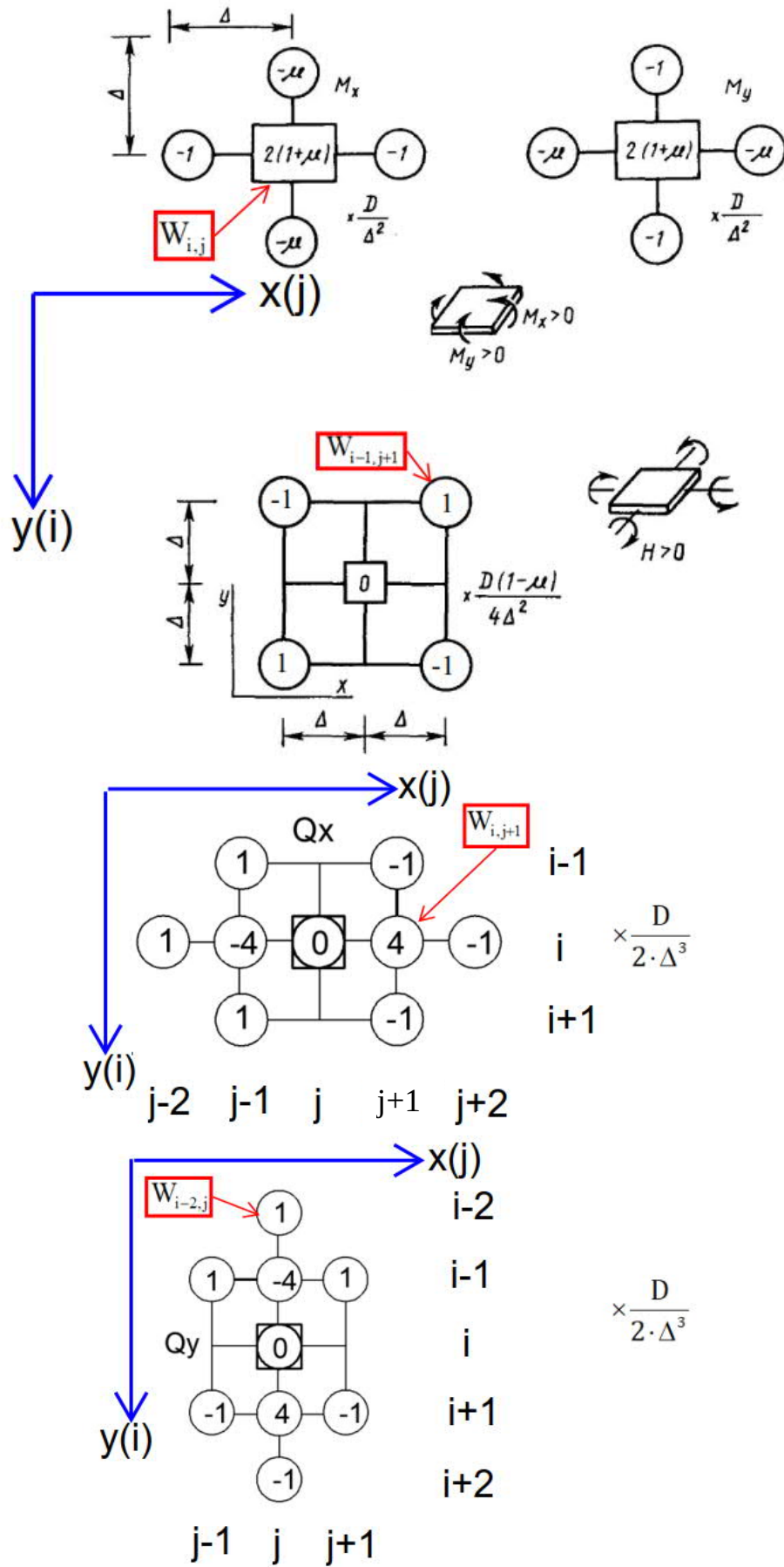


Рис. 4

Условия на контуре плиты

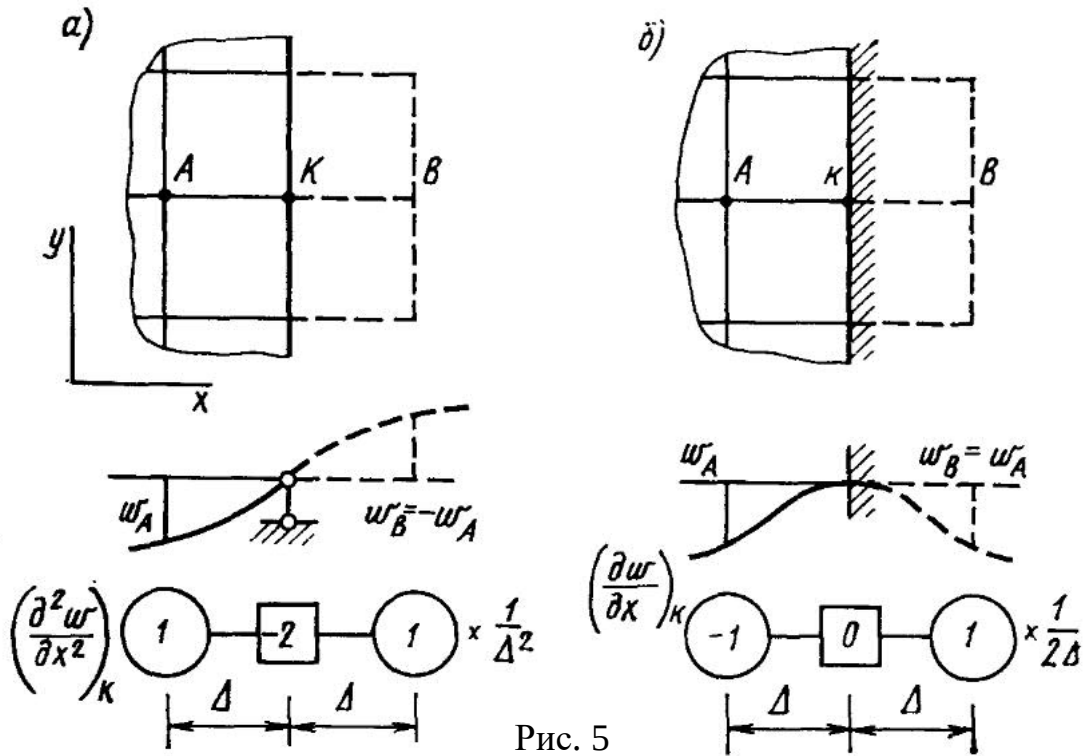


Рис. 5

Рассмотрим характерные случаи для кромки $x = \text{const}$.

1. Шарнирно-опертый край (рис. 5, а). В точке K имеем $w_K = 0$ и $(\partial^2 w / \partial x^2)_K = 0$, что с применением оператора второй производной (см. рис. 2) дает

$$\frac{w_A - 2w_K + w_B}{\Delta^2} = 0.$$

Отсюда получаем, что $w_B = -w_A$.

2. Заделанный край (рис. 5, б). Аналогично имеем $w_K = 0$, а из условия $(\partial w / \partial x)_K = 0$ с помощью оператора первой производной см. (рис. 1) получим $(w_B - w_A) / 2\Delta = 0$, откуда $w_B = w_A$.

3. Свободная кромка (рис. 6).

В этом

случае составляются два силовых условия: $M_x = 0$ и $V_x = 0$. Используя приводимые ниже операторы усилий (рис. 4 и 7), эти два

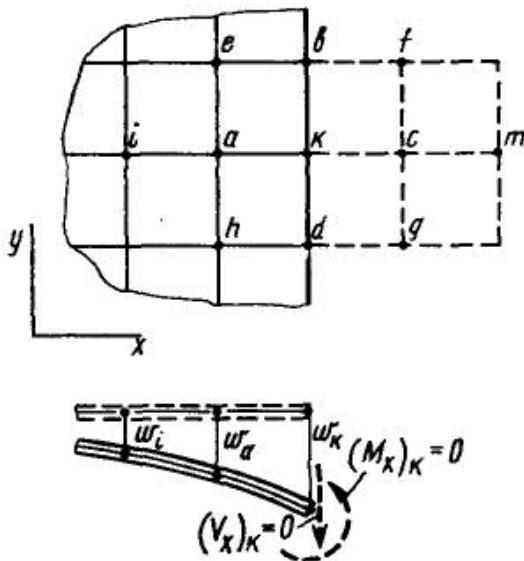


Рис. 6

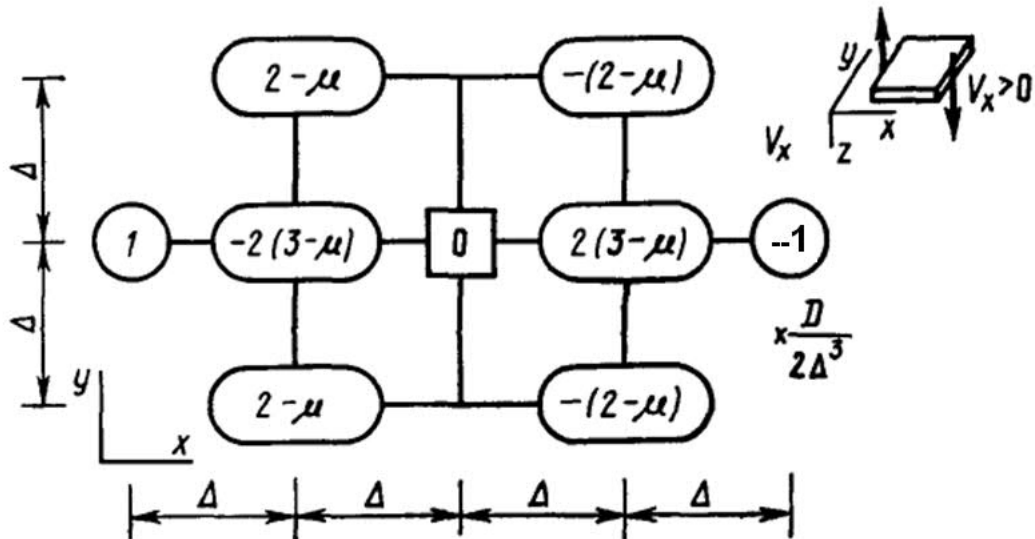


Рис. 7

условия для точки k , лежащей на кромке, запишем так:

$$2(1 + \mu)w_k - w_a - w_c - \mu(w_b + w_d) = 0;$$

$$2(3 - \mu)(w_c - w_a) + (2 - \mu)(w_e + w_h - w_f - w_g) + w_i - w_m = 0.$$

Как видим, в данном случае приходится вводить в расчет два слоя вспомогательных законтурных точек.

ПРИМЕР РАСЧЕТА

Рассмотрим пример расчета на изгиб неразрезной двухпролетной пластины (рис. 8). На этом рисунке приведена нумерация узлов с учетом симметрии системы относительно оси $O - O$. Во всех узлах на контуре, а также вдоль линии $x = 4\Delta$ прогибы равны нулю. В законтурных узлах для заделанных краев и шарнирно опертого края (с учетом рис. 5) имеем

$$\left. \begin{aligned} w_{1''} &= w_1; w_{6''} = w_6; w_{5''} = w_5; w_{10''} = w_{10}; \\ w_{1'} &= -w_1; w_{2'} = -w_2; w_{3'} = -w_3. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

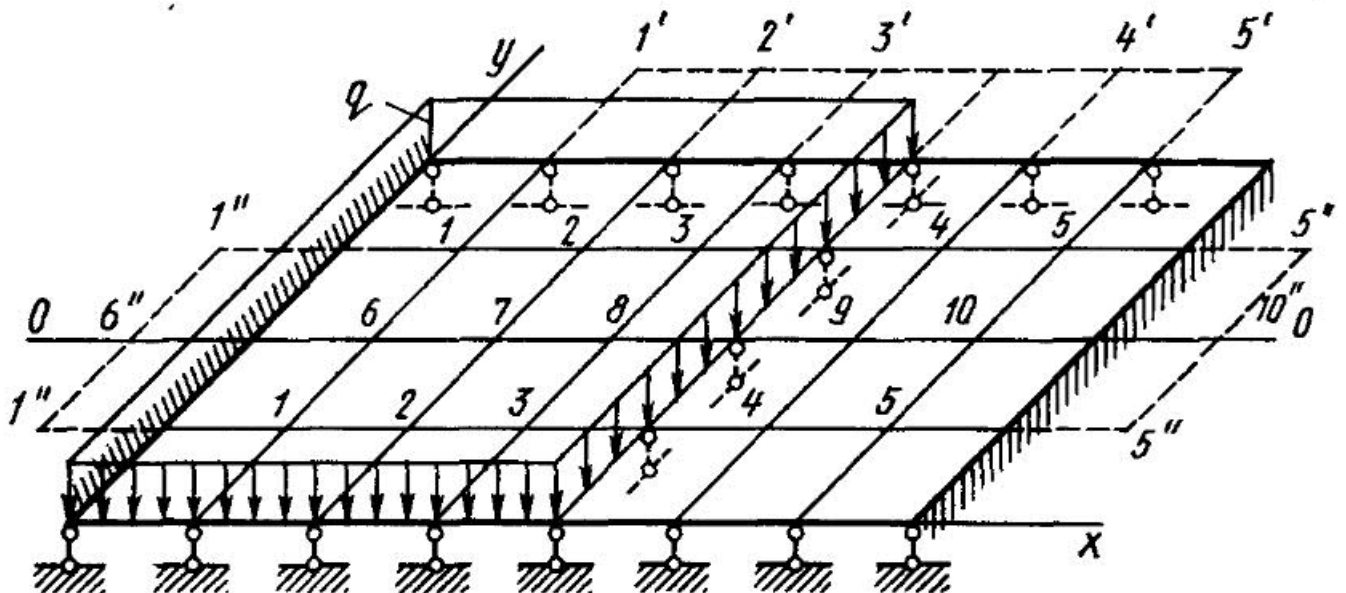


Рис. 8

Узловые нагрузки на правом поле пластины $q_4 = q_5 = q_9 = q_{10} = 0$, а на левом — $q_1 = q_2 = q_3 = q_6 = q_7 = q_8 = q = \text{const}$. Используя оператор (3, а), составляем уравнения (*) для точек 1, 2,, 10, которые с учетом (а) получают вид

$$\vec{R}w = \vec{R}_q, \quad (9)$$

где

$$R = \begin{bmatrix} 21 & -8 & 1 & 0 & 0 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 20 & -8 & 0 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 20 & 1 & 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 20 & -8 & 0 & 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 21 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \\ -16 & 4 & 0 & 0 & 0 & 21 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -16 & 4 & 0 & 0 & -8 & 20 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -16 & 0 & 0 & 1 & -8 & 20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 4 & 0 & 0 & 1 & 20 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -16 & 0 & 0 & 0 & -8 & 21 \end{bmatrix};$$

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{10} \end{bmatrix}; \quad \vec{R}_q = \frac{q\Delta^4}{D} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

После решения системы уравнений (9) получаем числовое поле прогибов (рис. 9). Поверхность изогнутой пластины изображена на рис. 8.10. Общий множитель у прогибов $q\Delta^4/D$. Теперь с помощью операторов внутренних усилий (рис.10) могут быть вычислены моменты в пластине. На рис. 11 для $\mu = 0,25$ показаны изгибающие моменты M_x , а на рис.12 — крутящие моменты H .

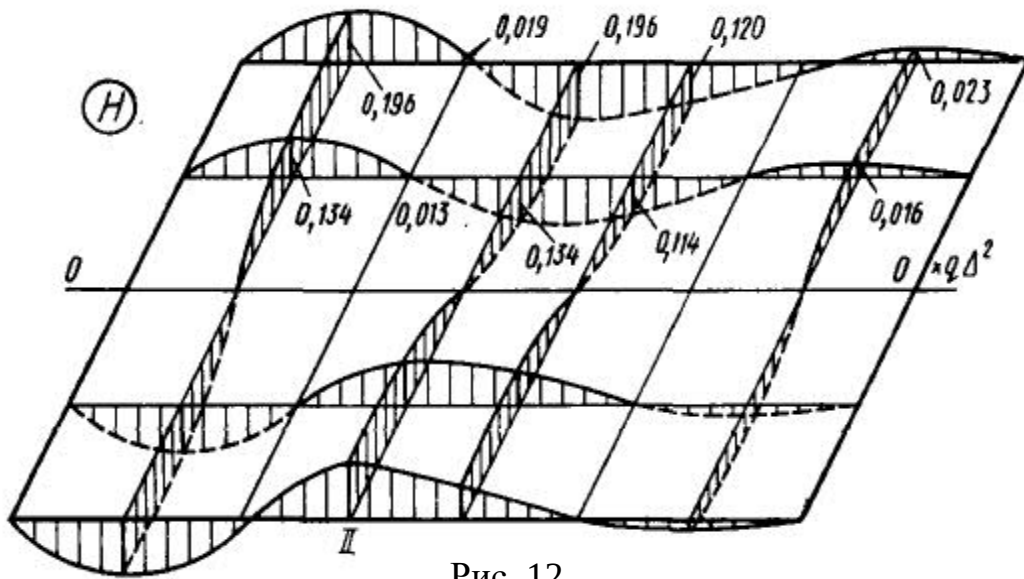


Рис. 12

Найдем опорную реакцию P_k в узле k , лежащем на оси симметрии $O - O$ (см. рис. 10). Для этого наложим оператор $\nabla^2 \nabla^2 w$ на эту точку и составим уравнение $(\nabla^2 \nabla^2 w)_k = P_k / (\Delta^2 D)$, что дает

$[-8(0,517 - 0,089) + 2(0,382 + 0,382 - 0,063 - 0,063) + 0,712 - 0,048] q/D = P_k / (\Delta^2 D)$. Отсюда $P_k = -1,484 q \Delta^2$. Знак минус говорит о том, что эта сила, как внешняя для пластины, направлена вверх.