Расчет прямоугольной пластины методом Леви

Решение М. Леви пригодно для расчета прямоугольной пластины, два противоположных края которой шарнирно оперты, а два других края закреплены произвольно (шарнирно оперты, защемлены иди свободны). Например, у пластины, изображенной на рис. 1, края OC и AB шарнирно оперты, а края OA и BC защемлены.

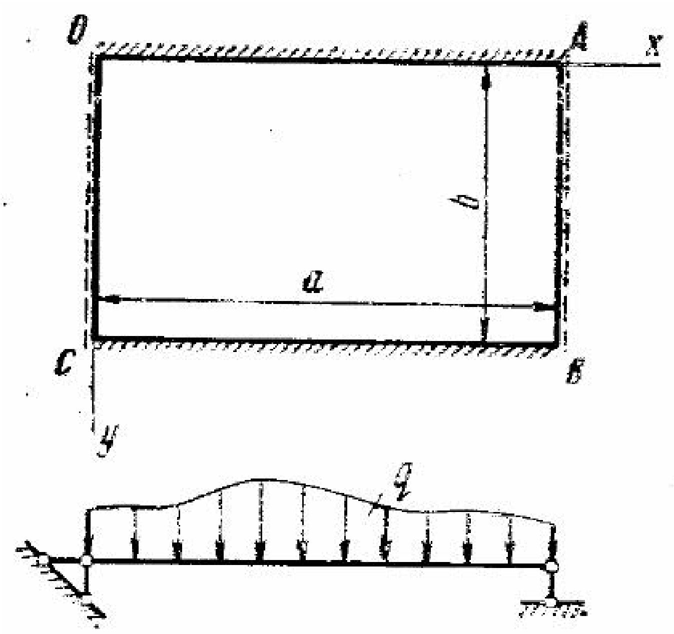

Рис. 1

Граничные условия на краях OC и AB следующие:

$$\text{при} \quad x = 0, a: \quad w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{1}$$

Чтобы выполнить эти условия функцию прогибов можно взять в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \cdot \sin(\lambda x), \tag{2}$$

где $\lambda = m\pi / a$. Действительно,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y)\lambda^2 \sin(\lambda x) \quad \text{и} \quad \sin(\lambda \cdot 0) = 0, \ \sin(\lambda a) = \sin(m\pi) = 0.$$

Функция (2) должна удовлетворять основному уравнению изгиба плит (уравнению Софии Жермен)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}. \tag{3}$$

Подставим (2) в (3)

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(Y_m^{IV}-2\lambda^2 Y_m''+\lambda^4 Y_m\right)\cdot\sin(\lambda x)=\frac{q(x,y)}{D} \tag{4}$$

Для решения уравнения (4) разложим функцию $q(x,y)$ в тригонометрический ряд Фурье по синусам

$$q(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty} q_m(y)\cdot\sin(\lambda x), \tag{5}$$

где

$$q_m(y)=\frac{2}{a}\cdot\int_0^a q(x,y)\cdot\sin(\lambda x)\,dx\,. \tag{6}$$

Подставим (5) в (4) и сгруппируем слагаемые при $\sin(\lambda x)$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(Y_m^{IV}-2\lambda^2 Y_m''+\lambda^4 Y_m-\frac{q_m}{D}\right)\cdot\sin(\lambda x)=0\,. \tag{7}$$

Это уравнение выполняется, если каждый множитель при $\sin(\lambda x)$ равен нулю

$$Y_m^{IV}-2\lambda^2 Y_m''+\lambda^4 Y_m=\frac{q_m}{D}\,. \tag{8}$$

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (8) равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Однородное уравнение имеет вид

$$Y_m^{IV}-2\lambda^2 Y_m''+\lambda^4 Y_m=0\,. \tag{9}$$

Его общее решение можно представить так:

$$Y_{m1}=C_{1m}\,\mathrm{ch}\lambda y+C_{2m}\lambda y\,\mathrm{sh}\lambda y+C_{3m}\,\mathrm{sh}\lambda y+C_{4m}\lambda y\,\mathrm{ch}\lambda y\,. \tag{10}$$

Частное решение уравнения (8) возьмем в виде [1]

$$F_m(y)=\frac{1}{\lambda^2 Da}\int_0^y\left\{\left[(y-t)\,\mathrm{ch}\lambda(y-t)-\frac{1}{\lambda}\mathrm{sh}\lambda(y-t)\right]\cdot\int_0^a q(x,t)\sin\lambda x\,dx\right\}dt\,. \tag{11}$$

Таким образом, общее решение уравнения (8) запишется следующим образом:

$$Y_m(y)=Y_{m1}(y)+F_m(y)=C_{1m}\,\mathrm{ch}\lambda y+C_{2m}\lambda y\,\mathrm{sh}\lambda y+C_{3m}\,\mathrm{sh}\lambda y+C_{4m}\lambda y\,\mathrm{ch}\lambda y+F_m(y). \tag{12}$$

Подставляя (12) в (2), получим

$$w(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_{1m}\,\mathrm{ch}\lambda y+C_{2m}\lambda y\,\mathrm{sh}\lambda y+C_{3m}\,\mathrm{sh}\lambda y+C_{4m}\lambda y\,\mathrm{ch}\lambda y+F_m(y)\right)\cdot\sin(\lambda x)\,. \tag{13}$$

Произвольные постоянные $C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}$ находятся из условий закрепления границ ОА и ВС (рис. 1). Рассмотрим пластинку, у которой эти края жестко закреплены (рис. 1). Тогда получим следующие граничные условия:

$$\text{при } y=0,b: \quad w=\frac{\partial w}{\partial y}=0\,.$$

Подставив в них функцию прогибов (2), будем иметь

$$\sum_{m=1}^{\infty} Y_m(0)\cdot\sin\left(\lambda x\right)=0,\quad \sum_{m=1}^{\infty} Y'_m(0)\cdot\sin\left(\lambda x\right)=0,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} Y_m(b)\cdot\sin\left(\lambda x\right)=0,\quad \sum_{m=1}^{\infty} Y'_m(b)\cdot\sin\left(\lambda x\right)=0.$$

Так как эти уравнения должны выполняться при любых значениях аргумента x, то

$$\left.\begin{aligned} &Y_m(0)=0,\quad Y'_m(0)=0,\\ &Y_m(b)=0,\quad Y'_m(b)=0.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Внося в условия (14) функцию (12), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}.

$$\left.\begin{aligned} &C_{1m}+F_m(0)=0,\quad C_{3m}\lambda+C_{4m}\lambda+F'_m(0)=0,\\ &C_{1m}\,\mathrm{ch}\lambda b+C_{2m}\lambda b\,\mathrm{sh}\lambda b+C_{3m}\,\mathrm{sh}\lambda b+C_{4m}\,\lambda b\,\mathrm{ch}\,\lambda b+F_m(b)=0,\\ &C_{1m}\lambda\,\mathrm{sh}\lambda b+C_{2m}\left(\mathrm{sh}\lambda b+b\lambda\,\mathrm{ch}\lambda b\right)\lambda+C_{3m}\lambda\,\mathrm{ch}\lambda b+\\ &+C_{4m}\lambda\left(\mathrm{ch}\lambda b+b\lambda\,\mathrm{sh}\lambda b\right)+F'_m(b)=0.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Система уравнений (15) с учетом, что $F_m(0)=0$ и $F'_m(0)=0$, имеет следующее решение:

$$\left.\begin{aligned} &C_{1m}=0,\quad C_{2m}=\frac{\alpha\lambda\,\mathrm{sh}\alpha\,F_m(b)+\left(\mathrm{sh}\alpha-\alpha\,\mathrm{ch}\alpha\right)F'_m(b)}{\lambda\left(\alpha^2-\mathrm{sh}^2\alpha\right)},\\ &C_{3m}=\frac{\left(\mathrm{sh}\alpha+\alpha\,\mathrm{ch}\alpha\right)F_m(b)-b\,\mathrm{sh}\alpha\,F'_m(b)}{\alpha^2-\mathrm{sh}^2\alpha},\\ &C_{4m}=-C_{3m}=\frac{-\left(\mathrm{sh}\alpha+\alpha\,\mathrm{ch}\alpha\right)F_m(b)+b\,\mathrm{sh}\alpha\,F'_m(b)}{\alpha^2-\mathrm{sh}^2\alpha},\quad \alpha=\lambda\,b=\frac{m\pi}{a}b.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Если край OA защемлен, а край BC шарнирно оперт, то граничные условия на них имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\text{при}\quad y=0\quad w=0,\ \frac{\partial w}{\partial y}=0,\\ &\text{при}\quad y=b\quad w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Подставив в (17) функцию прогибов из (2), найдем

$$\left.\begin{aligned} &Y_m(0)=0,\quad Y'_m(0)=0,\\ &Y_m(b)=0,\quad Y''_m(b)=0.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Из (18) с учетом (12) получим

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha = \lambda b, \quad F_m(0) = F'_m(0) = 0, \quad C_{1m} = 0, \quad C_{3m} + C_{4m} = 0,\\
&C_{1m}\operatorname{ch}\alpha + C_{2m}\alpha\operatorname{sh}\alpha + C_{3m}\operatorname{sh}\alpha + C_{4m}\alpha\operatorname{ch}\alpha + F_m(b) = 0,\\
&C_{1m}\operatorname{ch}\alpha + C_{2m}\left(2\operatorname{ch}\alpha + \alpha\operatorname{sh}\alpha\right) + C_{3m}\operatorname{sh}\alpha +\\
&+C_{4m}\left(2\operatorname{sh}\alpha + \alpha\operatorname{ch}\alpha\right) + \frac{F''_m(b)}{\lambda^2} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Решив систему уравнений (20), найдем значения произвольных постоянных $C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}$

$$\left.\begin{aligned}
&C_{1m} = 0, \quad C_{2m} = \frac{\lambda^2\left(\operatorname{sh}\alpha + \alpha\operatorname{ch}\alpha\right)F_m(b) + \left(\operatorname{sh}\alpha - \alpha\operatorname{ch}\alpha\right)F''_m(b)}{2\lambda^2\left(\alpha - \operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha\right)},\\
&C_{3m} = \frac{\lambda^2\left(2\operatorname{ch}\alpha + \alpha\operatorname{sh}\alpha\right)F_m(b) - \alpha\operatorname{sh}\alpha F''_m(b)}{2\lambda^2\left(\alpha - \operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha\right)},\\
&C_{4m} = -C_{3m} = \frac{-\lambda^2\left(2\operatorname{ch}\alpha + \alpha\operatorname{sh}\alpha\right)F_m(b) + \alpha\operatorname{sh}\alpha F''_m(b)}{2\lambda^2\left(\alpha - \operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha\right)}.
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

При других закреплениях краев OA и BC получим другие значения произвольных постоянных.

Зная функцию прогибов нетрудно получить выражения для внутренних усилий и опорных реакций

$$\begin{aligned}
&M_x = D\sum_{m=1}^{\infty}\left(\lambda^2 Y_m - \nu Y''_m\right)\sin\frac{m\pi x}{a};\\
&M_y = D\sum_{m=1}^{\infty}\left(\lambda^2 \nu Y_m - Y''_m\right)\sin\frac{m\pi x}{a};\\
&H = -D(1-\nu)\sum_{m=1}^{\infty}\lambda Y'_m\cos\frac{m\pi x}{a};\\
&Q_x = D\sum_{m=1}^{\infty}\left(\lambda^3 Y_m - \lambda Y''_m\right)\cos\frac{m\pi x}{a};\\
&Q_y = D\sum_{m=1}^{\infty}\left(\lambda^2 Y'_m - Y'''\right)\sin\frac{m\pi x}{a};\\
&V_x = D\sum_{m=1}^{\infty}\left[\lambda^3 Y_m - \lambda\left(2-\nu\right)Y''_m\right]\cos\frac{m\pi x}{a};\\
&V_y = D\sum_{m=1}^{\infty}\left[-Y'''_m + \left(2-\nu\right)\lambda^2 Y'_m\right]\sin\frac{m\pi x}{a}.
\end{aligned} \tag{22}$$