

Расчет пластины с эллиптическим жестко закрепленным контуром.

8.1 Функция прогиба.

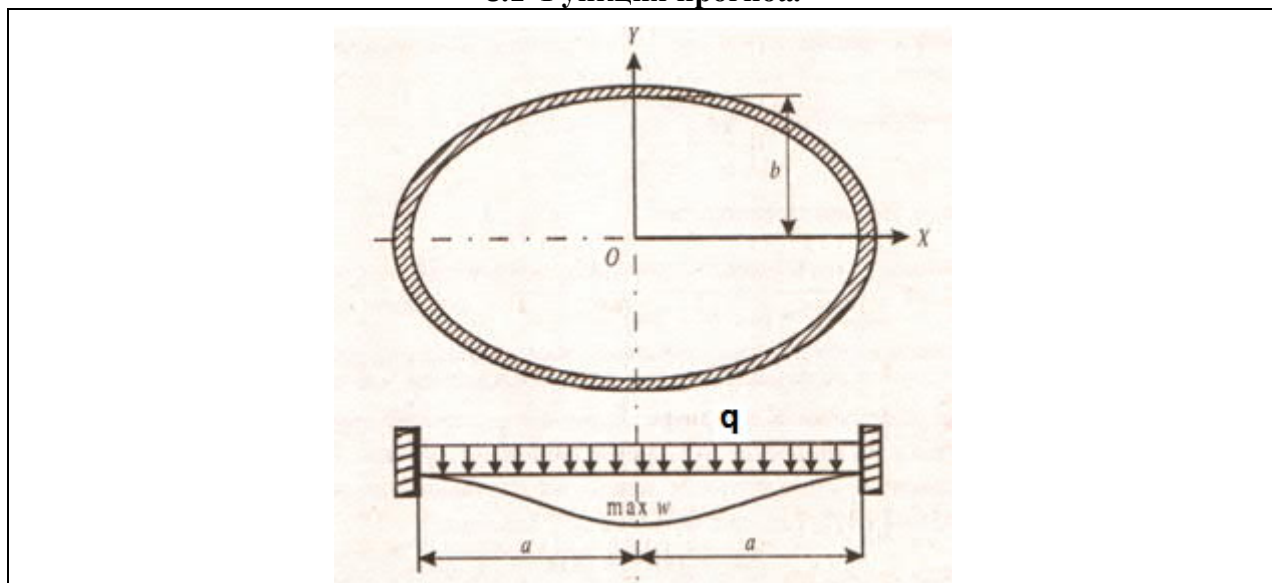


Рис. 8.1 Пластина с эллиптическим жестко закрепленным контуром

Уравнение изгиба срединной поверхности пластины

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} W(x, y) \right) + 2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} W(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} W(x, y) \right) = \frac{q}{D} \quad (8.1)$$

Цилиндрическая жесткость пластины

$$D = \frac{1}{12} \frac{E h^3}{1 - \nu^2} \quad (8.2)$$

Функция прогиба удовлетворяет условиям жесткого закрепления на контуре

$$W(x, y) = C \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2 \quad (8.3)$$

Подставляем в (8.3) координаты контура пластины (параметрическое задание уравнения эллипса $x = a \cos(\alpha)$, $y = b \sin(\alpha)$), получаем

$$(W(a \cos(t), b \sin(t))) = C (1 - \cos(t)^2 - \sin(t)^2)^2 = 0 \quad (8.4)$$

Второе условие - производная по нормали к контуру равна нулю. Производная по направлению равна скалярному произведению вектора градиента на направляющий вектор единичной нормали

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} W = \left(\frac{\partial}{\partial x} W \right) \cos(\alpha) + \left(\frac{\partial}{\partial y} W \right) \sin(\alpha) \quad (8.5)$$

Вектор градиента и вектор единичной нормали соответственно равны:

$$\nabla_g := \left[\begin{array}{c} 4C \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) x \\ - \frac{4C \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) y}{b^2} \end{array} \right] \quad (8.6)$$

$p := \left[\frac{b^2 x}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}}, -\frac{a^2 y}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}} \right].$	
--	--

Тогда производная по направлению

$\frac{\partial}{\partial \lambda} W = 4 \frac{C (a^2 b^2 - x^2 b^2 - y^2 a^2) (-b^4 x^2 + a^4 y^2)}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2} a^4 b^4}$	(8.7)
---	-------

должна обращаться в нуль на контуре. Действительно

$4 \frac{C (1 - \cos(t)^2 - \sin(t)^2) \sin(t)^2 a^2}{\sqrt{a^4 b^2 \sin(t)^2 + b^4 a^2 \cos(t)^2}} - \frac{4 C (1 - \cos(t)^2 - \sin(t)^2) \cos(t)^2 b^2}{\sqrt{a^4 b^2 \sin(t)^2 + b^4 a^2 \cos(t)^2}} = 0$	(8.8)
---	-------

На рис.8.2 показано векторное поле нормалей к семейству эллипсов ($\frac{a}{b} = 2$)

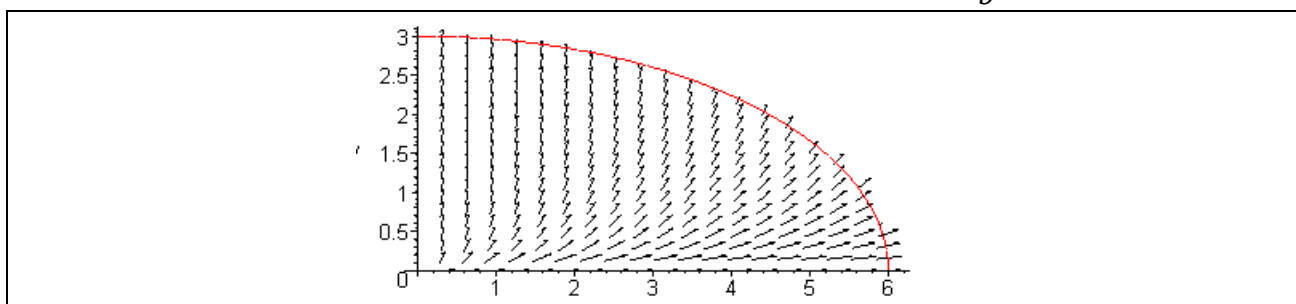


Рис.8.2 Векторное поле нормалей к семейству эллипсов

Подставляем функцию прогиба (8.3) в уравнение (8.1) находим константу

$C = \frac{1}{8} \frac{q a^4 b^4}{D (3 b^4 + 2 a^2 b^2 + 3 a^4)}.$	(8.9)
--	-------

Таким образом, получаем функцию прогиба, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (8.1) и условиям жесткого закрепления

$W(x, y) = \frac{1}{8} \frac{q a^4 b^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2}{D (3 b^4 + 2 a^2 b^2 + 3 a^4)} = \frac{3}{2} \frac{q (1 - \nu^2) a^4 b^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2}{E h^3 (3 b^4 + 2 a^2 b^2 + 3 a^4)}$	(8.10)
---	--------

Легко видеть, что константа $C = W(x = 0, y = 0)$ равна прогибу в центре пластины.

Далее дадим графическую иллюстрацию результатов вычислений при следующих исходных данных:

$a = 6\text{ м}, b = 3\text{ м}, h = 0,2\text{ м}, \nu = 0,2, E = 3,002 \cdot 10^7 \text{ кН / м}^2, q = 5 \text{ кН / м}^2.$	(8.11)
---	--------

На рис.8.3, показана изогнутая срединная поверхность плиты, а на рис. 8.4 линии уровня прогибов

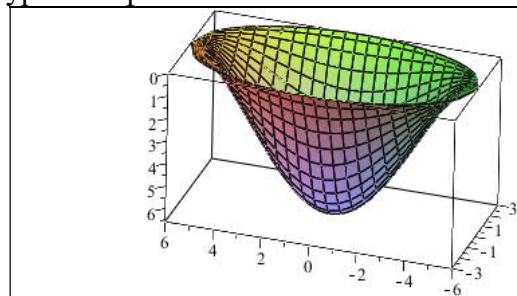


Рис.8.3 Изогнутая срединная поверхность плиты

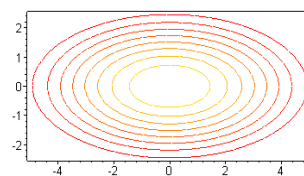


Рис.8.4 Линии уровня прогибов.
 $W_{\max} = W(0,0) = 0.65857 \text{ мм}$

8.2 Внутренние усилия.

В выражение для изгибающего момента $M_x(x, y)$ подставляем функцию прогиба(8.10) и дифференцируем

$M_x(x, y) = -D \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, y) \right) + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} W(x, y) \right) \right),$ $M_x(x, y) = \frac{1}{2} \frac{q (-3 b^4 x^2 + b^4 a^2 - b^2 y^2 a^2 - 3 \nu a^4 y^2 + \nu a^4 b^2 - \nu a^2 x^2 b^2)}{3 b^4 + 2 a^2 b^2 + 3 a^4}.$	(8.12)
--	--------

На рис.8.5 показана функция изгибающего момента $M_x(x, y)$ и указано значение момента в центре пластины. На рис.8.6 поверхность $M_x(x, y)$ разделена нуль плоскостью и указан *абсолютный максимум* на конце большей полуоси эллипса $|M_x(a, 0)| = 3,05 \text{ кНм/м}$.

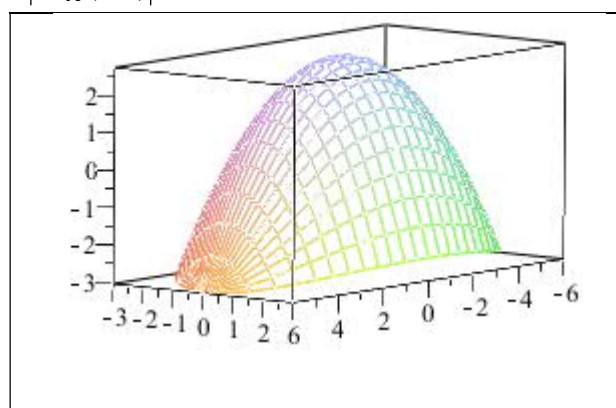


Рис.8.5 Изгибающий момент M_x
 $M_x(0, 0) = 2,75 \text{ кНм/м}$

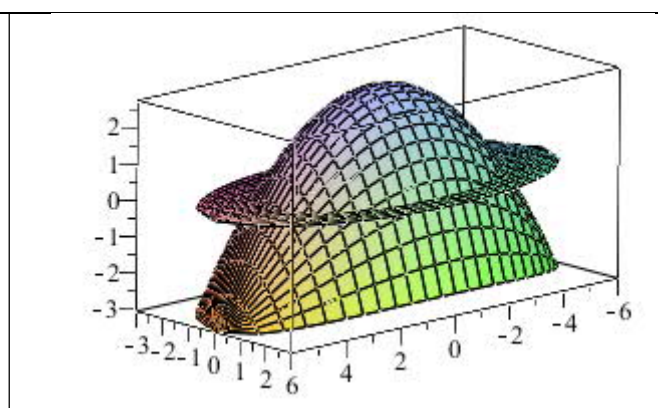
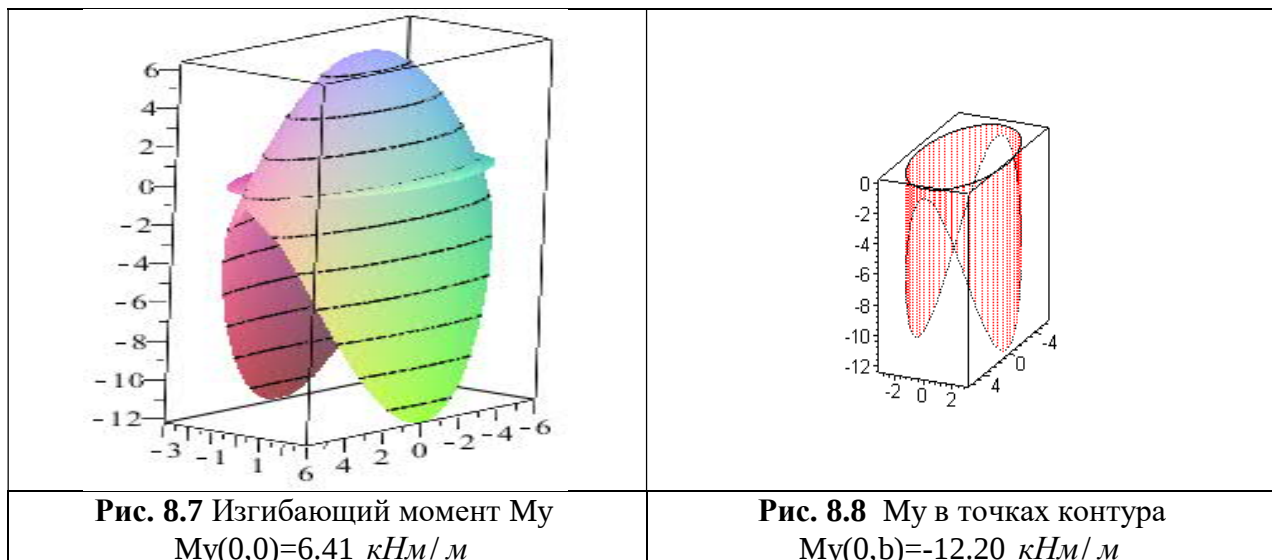


Рис. 8.6 Изгибающий момент M_x , и
сечение 0-плоскостью
 $M_x(a, 0) = -3,05 \text{ кНм/м}$

В выражение для изгибающего момента $M_y(x, y)$ подставляем функцию прогиба(8.10) и дифференцируем

$M_y(x, y) = -D \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} W(x, y) \right) + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, y) \right) \right)$ $M_y(x, y) = \frac{1}{2} \frac{q (-3 a^4 y^2 + a^4 b^2 - a^2 x^2 b^2 - 3 \nu b^4 x^2 + \nu b^4 a^2 - \nu b^2 y^2 a^2)}{3 b^4 + 2 a^2 b^2 + 3 a^4}$	(8.13)
--	--------

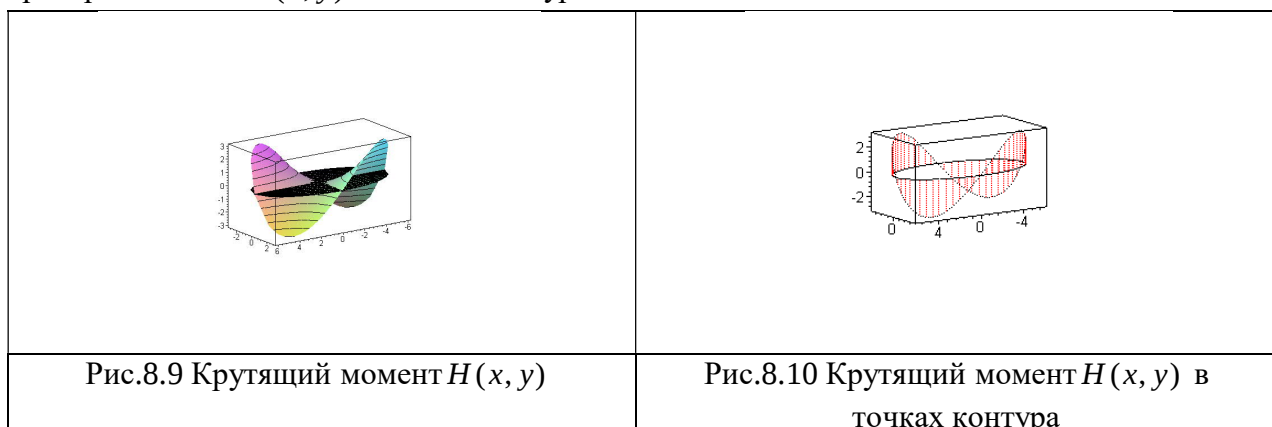
На рис.8.7 показана функция изгибающего момента $M_y(x, y)$ и указано значение момента в центре плиты. На рис.8.6 показана эпюра распределения $M_y(x, y)$ в точках контура и указан *абсолютный максимум* на конце меньшей полуоси эллипса $|M_y(0, b)| = 12,20 \text{ кНм/м}$.



В выражение для крутящего момента $H(x, y)$ подставляем функцию прогиба(8.10) и дифференцируем

$H(x, y) = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x \partial y},$	$H(x, y) = \frac{(v - 1) q a^2 b^2 y x}{3 b^4 + 2 a^2 b^2 + 3 a^4}$	(8.14)
---	---	---------------

На рис.8.9 показана функция крутящего момента $H_{xy}(x, y)$, а на рис.8.10 эпюра распределения $H(x, y)$ в точках контура.



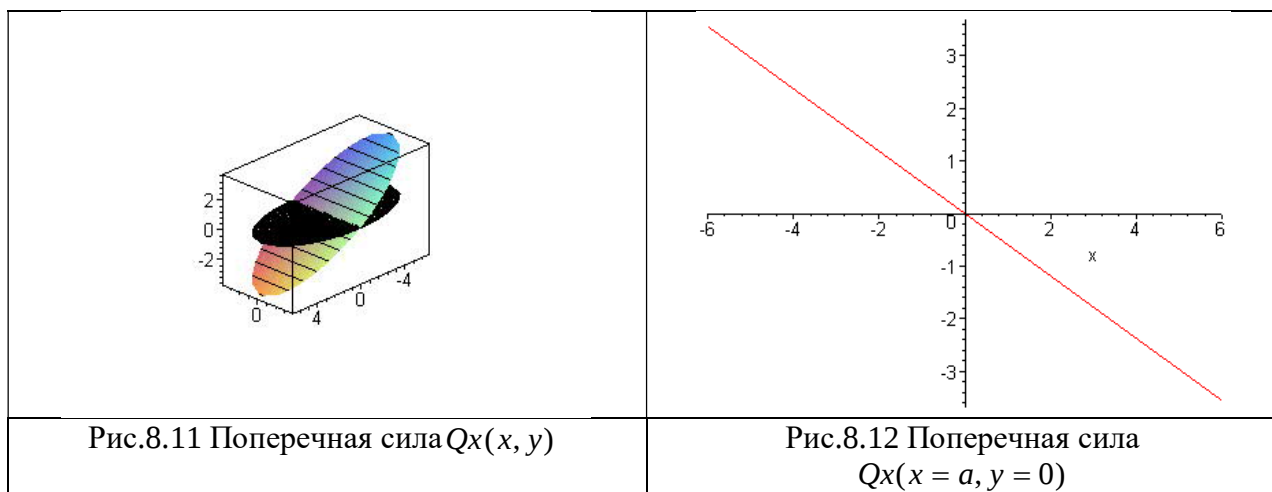
Абсолютный максимум в точках $(x_k = a \cos(\frac{\pi}{4}k), y_k = b \sin(\frac{\pi}{4}k))$

$$|H(x_k, y_k)| = 2,441 \text{ кН/м}.$$

В выражение для поперечной силы $Q_x(x, y)$ подставляем функцию прогиба(8.10) и дифференцируем

$Q_x(x, y) = -D \left(\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} W(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} W(x, y) \right) \right),$ $Q_x(x, y) = -\frac{q b^2 x (3 b^2 + a^2)}{3 b^4 + 2 a^2 b^2 + 3 a^4}.$	(8.15)
---	---------------

$Q_x(x, y)$ -линейная функция координаты x (рис. 8.11). Максиму в конце большей полуоси $Q_x(x =, y = 0) = -3.559 \text{ кН/м}$ (рис.8.12)



В выражение для поперечной силы $Q_y(x, y)$ подставляем функцию прогиба (8.10) и дифференцируем

$Q_y(x, y) = -D \left(\left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} W(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} W(x, y) \right) \right),$ $Q_y(x, y) = -\frac{q a^2 y (3 a^2 + b^2)}{3 b^4 + 2 a^2 b^2 + 3 a^4}.$	(8.16)
---	---------------

$Q_y(x, y)$ -линейная функция координаты y . Максиму в конце меньшей полуоси эллипса $Q_y(x = 0, y = b) = -13.22 \text{ кН} / \text{м}$.

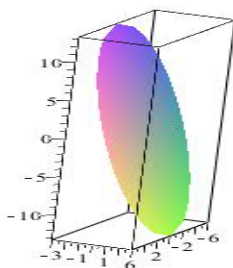


Рис.8.13 Поперечная сила $Q_y(x, y)$

8.3 Напряжения.

На рис 8.14 показаны законы распределения нормальных и касательных напряжений по толщине плиты

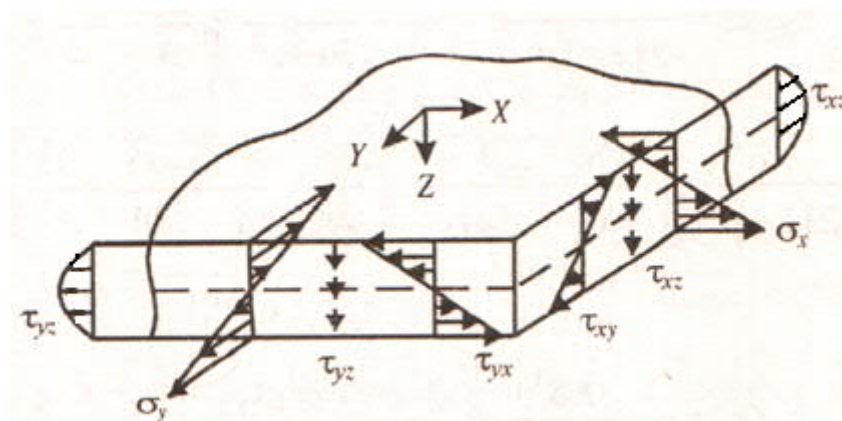


Рис.8.14. Распределение нормальных и касательных напряжений по толщине плиты

Нормальные напряжения σ_x, σ_y и касательные τ_{xy} достигают наибольших по абсолютной величине значений при $z = \pm \frac{h}{2}$. Касательные напряжения τ_{yz}, τ_{xz} имеют экстремальные значения на уровне срединной плоскости при $z = 0$.

Наибольшие значения напряжений в точках нижней и верхней поверхностей пластины (при $z = \pm \frac{h}{2}$) определяются по формулам (см. (7.7) $\delta = h$,

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{h^3} z, \sigma_y = \frac{12M_y}{h^3} z, \tau = \frac{12H}{h^3} z):$$

$\sigma_x = \pm \frac{6M_x}{h^2}, \quad \sigma_y = \pm \frac{6M_y}{h^2}, \quad \tau_{xy} = \pm \frac{6H}{h^2},$	(8.17)
---	--------

$\tau_{xz} = \pm \frac{3Q_x}{2h}, \quad \tau_{yz} = \pm \frac{3Q_y}{2h}.$	(8.18)
---	--------

При расчете пластин на прочность напряжения τ_{xz}, τ_{yz} , как правило, значительно меньше, чем напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и мало влияют на оценку прочности пластины.

Поэтому напряженное состояние в окрестности точек пластины можно рассматривать как плоское напряженное состояние.

Характер распределения напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ в точках нижней ($z = h/2$) и верхней ($z = -h/2$) поверхностей пластины повторяет закон распределения соответствующих усилий M_x, M_y, H (рис.8.6, рис.8.7, рис. 8.9.).

Для анализа напряженного состояния в окрестности точек нижней и верхней поверхностей пластины вычислим главные напряжения и определим положения главных сечений по формулам:

$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2},$ $\operatorname{tg}(\alpha_{\max}) = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{\max} - \sigma_x}.$	(8.19)
---	--------

Главные напряжения $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$ в точках нижней поверхности пластины представлены на рис. 8.15, рис.8.16. (**напряжения в МПа**) Для отделения зон растяжения и зон сжатия поверхности рассечены **плоскостью нуль**. На рис.8.18 поверхности $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$ совмещены. Такое совмещение позволяет визуально оценить *соотношение модулей главных напряжений* в каждой точке нижней поверхности. Напряжения в центре пластины $\sigma_{\max}(x=0, y=0) = 0,961 \text{ МПа}$ и на конце меньшей полуоси, $\sigma_{\max}(x=0, y=b) = -0,366 \text{ МПа}$. Напряжения в центре пластины $\sigma_{\min}(x=0, y=0) = 0,412 \text{ МПа}$ и на конце меньшей полуоси $\sigma_{\min}(x=0, y=b) = -1,831 \text{ МПа}$

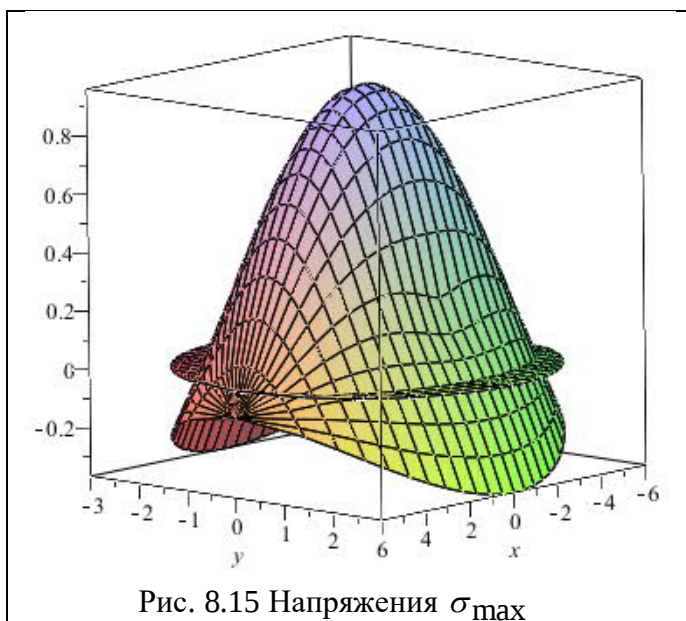


Рис. 8.15 Напряжения $\sigma_{\max}$

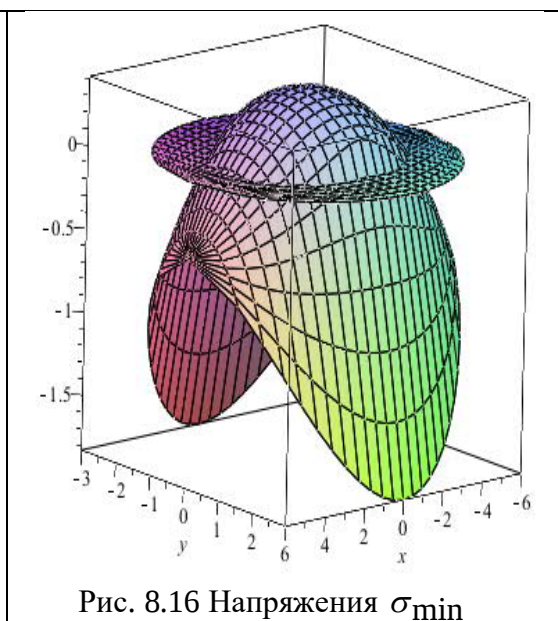


Рис. 8.16 Напряжения $\sigma_{\min}$

На рис.8.19 показано векторное поле главных напряжений. (картина напряженного состояния в точках). На рис. 8.19 вектор растягивающего напряжения отмечен красным цветом, а сжимающего напряжения – синим.

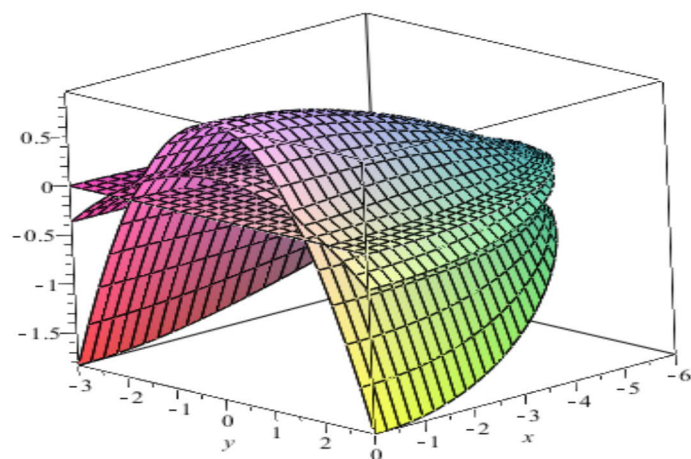


Рис.8.18 Напряжения $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$ в точках нижней поверхности (половина пластины)

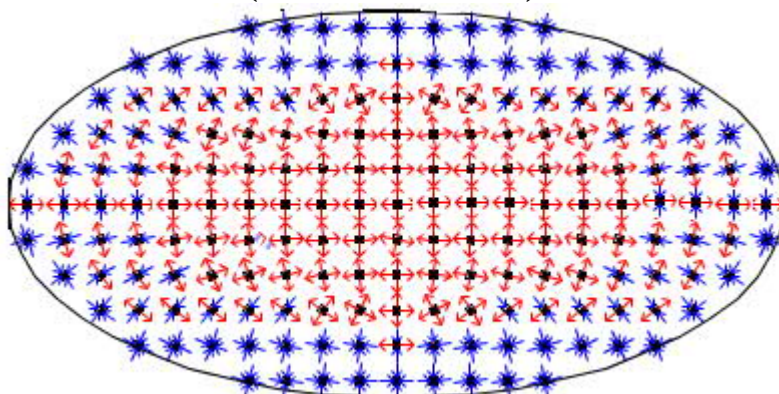


Рис.8.19 Картина напряженного состояния в точках нижней поверхности

В точках центральной части плиты имеет место **двустороннее растяжение**, вблизи зон жесткого закрепления **двустороннее сжатие**, в переходных зонах **растяжение – сжатие** (рис. 8.17).

Для пластины из хрупкого материала **напряженное состояние двустороннее растяжение** на наш взгляд является наиболее опасным. Напряженное состояние **двустороннее сжатие** наиболее благоприятным.

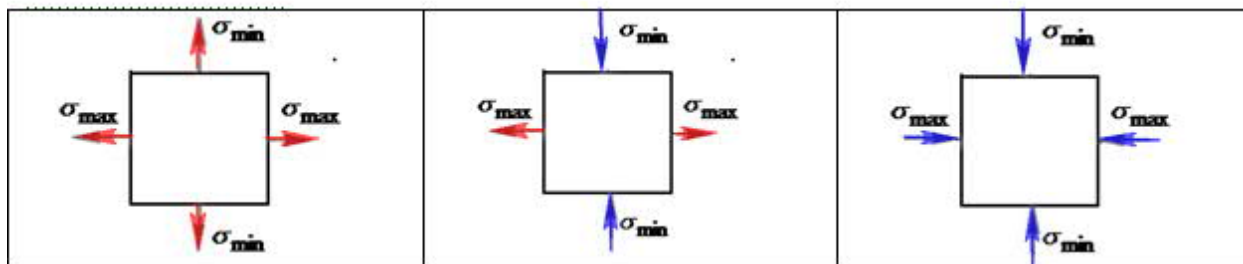


Рис. 8.17 Виды напряженных состояний в точке (см.рис.8.35)

В точке $(x = 0, y = 0, z = \frac{h}{2})$ двустороннее растяжение, $\sigma_{\max} = 0,961 \text{ МПа}$, $\sigma_{\min} = 0,412 \text{ МПа}$ (самая опасная точка нижней поверхности пластины).

Рассмотрим напряженное состояние в точках **верхней поверхности пластины** ($z = -\frac{h}{2}$).

На рис.8.20 показаны поверхности $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$ и их сечение нуль плоскостью. На рис.8.21 показано векторное поле главных напряжений (картина напряженного состояния в точках).

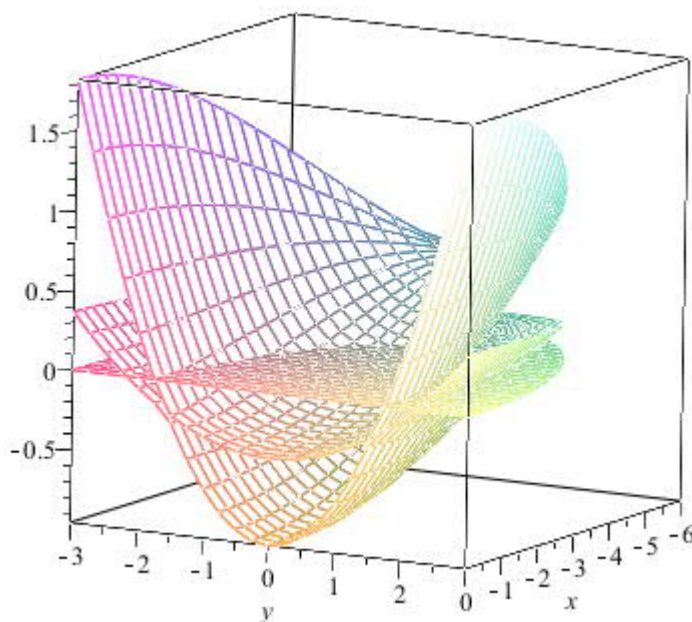


Рис.8. 20 Напряжения $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$ в точках верхней поверхности (половина пластины)

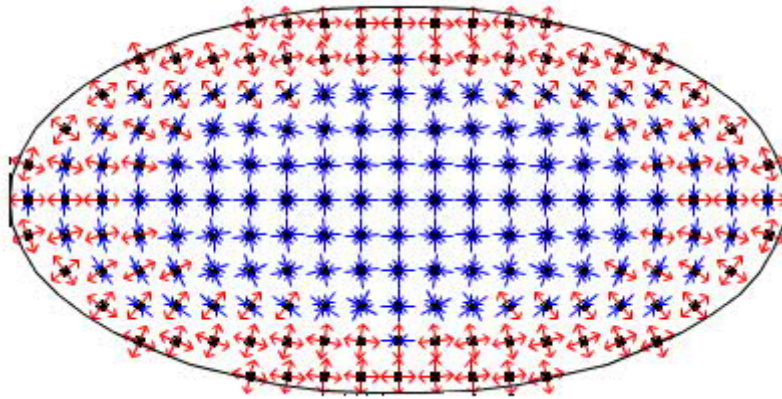


Рис. 8.21 Картина напряженного состояния в точках верхней поверхности

В точке $(x=0, y=b, z=-\frac{h}{2})$ двустороннее растяжение $\sigma_{\max} = 1,831 \text{ МПа}$,

$\sigma_{\min} = 0,366 \text{ МПа}$ (самая опасная точка верхней поверхности пластины).

Анализ картины напряженного состояния позволяет прогнозировать появление трещин на нижней и верхней поверхности пластины при увеличении интенсивности распределенной нагрузки q .

Первые трещины будут появляться на верхней поверхности пластины в точках, отвечающих концам малой оси эллипса (трещины перпендикулярны вектору наибольшего растягивающего напряжения). Затем трещины будут развиваться вдоль длиной закрепленной кромки. На нижней поверхности пластины первые трещины возникнут в центре (трещины перпендикулярны вектору наибольшего растягивающего напряжения). Далее трещины будут развиваться вдоль длиной оси эллипса.

8.4 Усилия в косых сечениях.

Рассмотрим порядок вычисления усилий в косых сечениях (рис. 8.22). Обозначим через α угол между осью x и внешней нормалью к сечению пластины n .

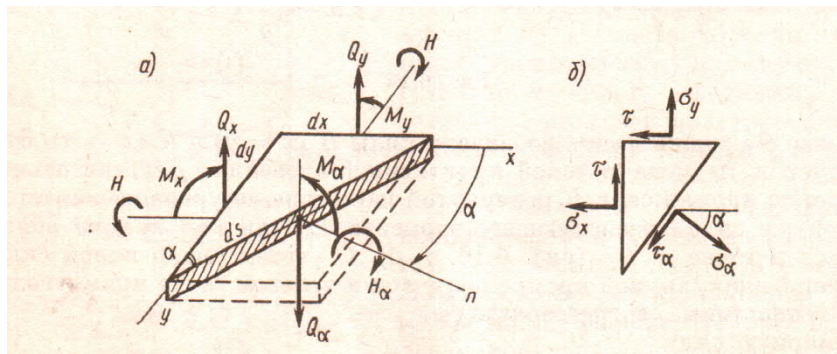


Рис.8.22 Положительные направления усилий (напряжений)

Тогда усилия в наклонных сечениях определятся по формулам:

$M_{\alpha} = M_x(x, y) \cos(\alpha)^2 + M_y(x, y) \sin(\alpha)^2 + 2 M_{xy}(x, y) \sin(\alpha) \cos(\alpha),$ $H_{\alpha} = (M_y(x, y) - M_x(x, y)) \sin(\alpha) \cos(\alpha) + M_{xy}(x, y) (\cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2),$ $Q_{\alpha} = Q_x(x, y) \cos(\alpha) + Q_y(x, y) \sin(\alpha),$ $\cos(\alpha) = \frac{b^2 x}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}}, \sin(\alpha) = -\frac{a^2 y}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}}$	(8.20)
---	--------

8.5 Расчет шарнирно опёртой по контуру плиты на действие сосредоточенной силы.

Объектом исследования является нагруженная по верхней поверхности сосредоточенной нагрузкой P прямоугольная в плане, шарнирно опёртая по контуру плита со сторонами a , b и толщиной h (рис. 8.23), модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν материала.

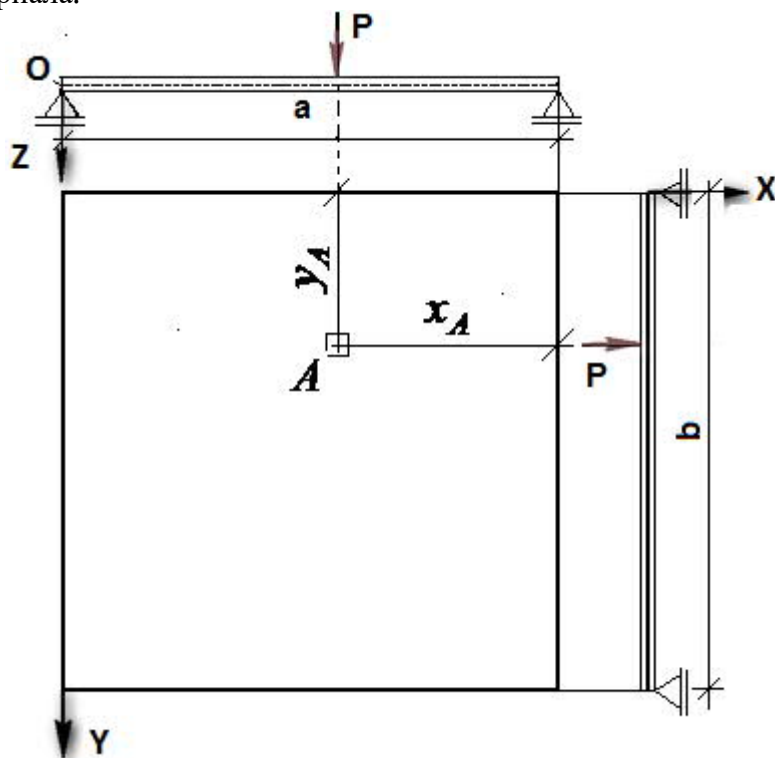


Рис. 8.23 Шарнирно опёртая по контуру плита

Сосредоточенная сила P задается как нагрузка интенсивностью q распределенная на малой площади dA , причем $P = qdA$.

В данном случае необходимо решить дифференциальное уравнение (7.12) при следующих граничных условиях:

$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D},$	(8.21)
$w = 0 _{x=0}, w = 0 _{x=a}, w = 0 _{y=0}, w = 0 _{y=b},$	
$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 _{x=0}, \quad M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 _{x=a},$	
$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 _{y=0}, \quad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 _{y=b}.$	

Решение задачи выполним с использованием одинарных тригонометрических

рядов
$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (\text{решение Леви}).$$

На рис. 2.4 показана изогнутая срединная поверхность плиты, а на рис 8.25 крутящий момент.

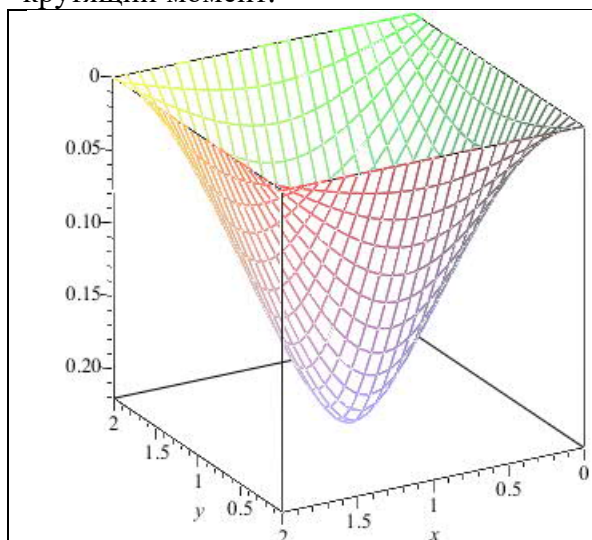


Рис.8.24 Функция прогиба

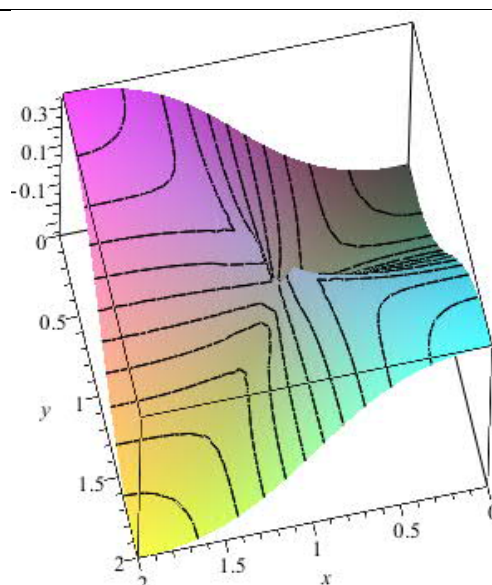


Рис.8.25 Крутящий момент

Поверхности главных напряжений $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$ на нижней поверхности плиты показаны на рис. 8.26; 8.27

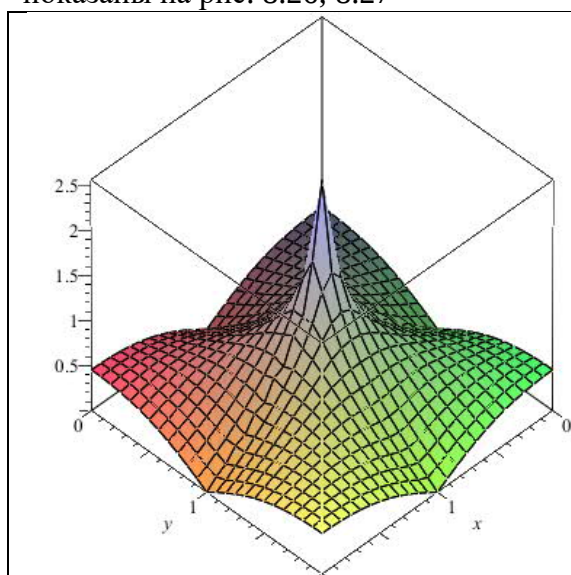


Рис. 8.26 Напряжения $\sigma_{\max}$

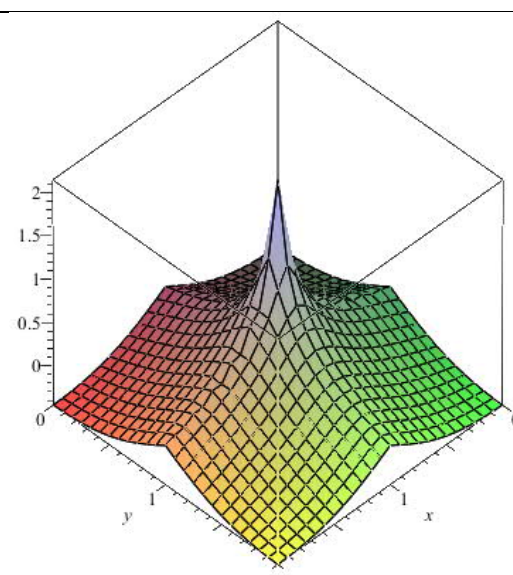


Рис. 8.27 Напряжения $\sigma_{\min}$

На рис.8.28 представлены совмещенные поверхности $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$, а на рис.8.29 картина напряженного состояния в точках на нижней поверхности плиты. В точках нижней поверхности имеет место *двустороннее растяжение* и *растяжение-сжатие*.

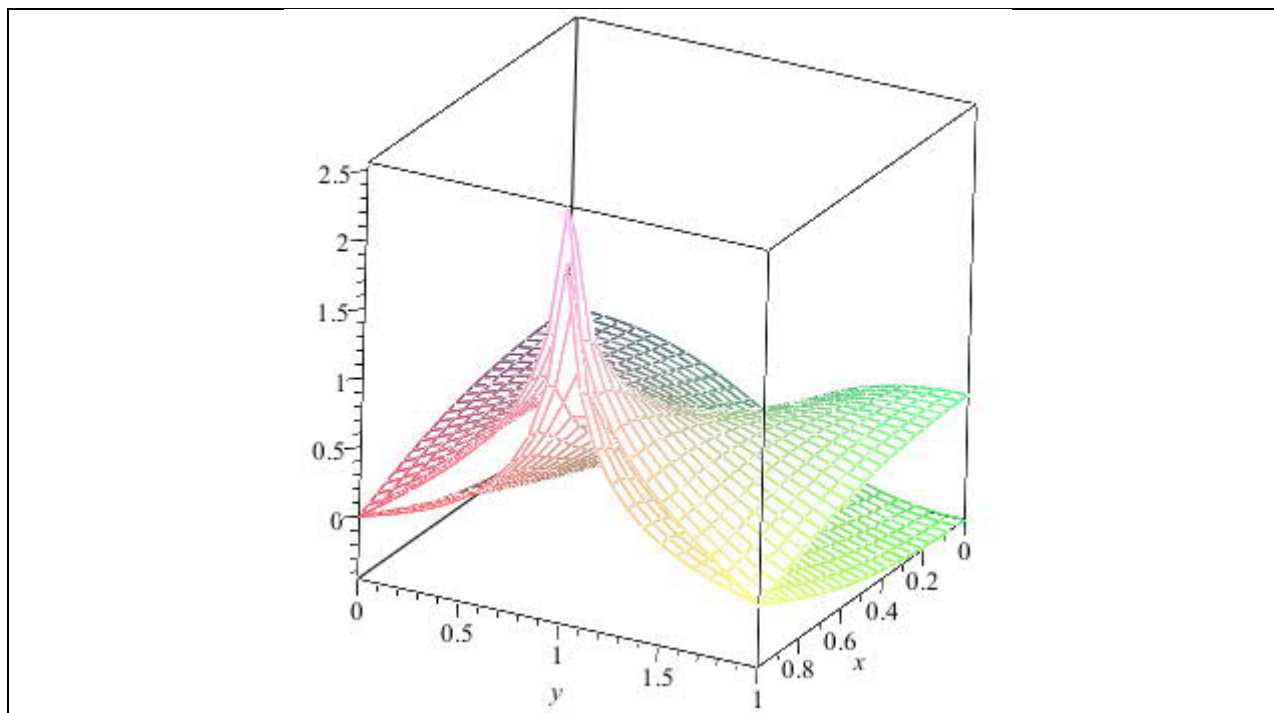


Рис.8.28 Поверхности $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$ (на половине плиты)

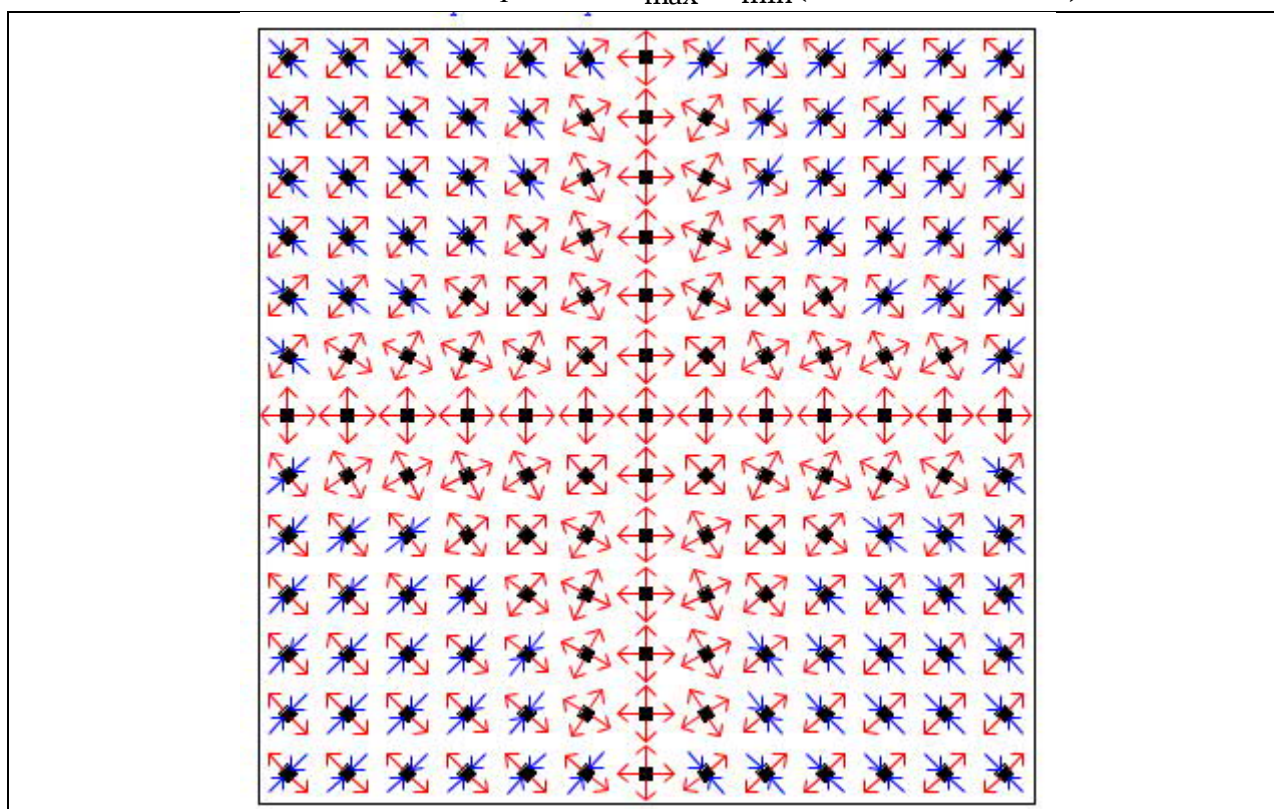


Рис.8.29 Картина напряженного состояния

На рис.8.30 показаны направления главных площадок, на которых действуют наибольшие растягивающие напряжения. Справа представлена шкала интенсивности напряжений. На рис. 8.31 показана *схема трещин на нижней поверхности плиты, загруженной сосредоточенной силой* (результаты - эксперимента при статическом возрастании силы).

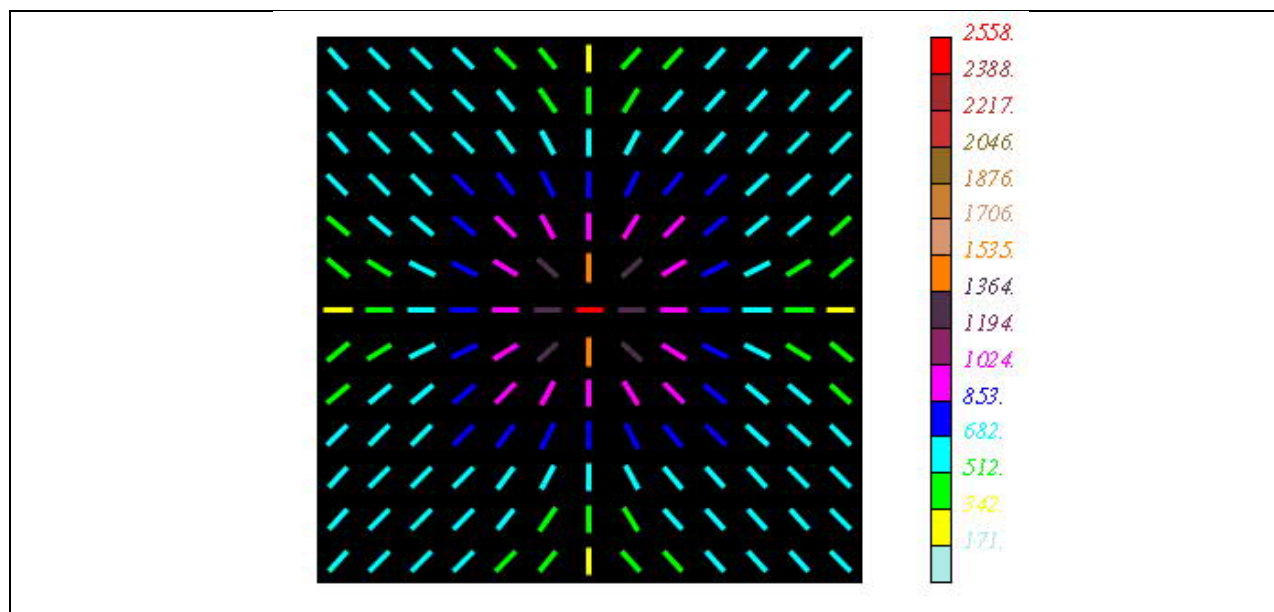


Рис.8.30 Направление главных площадок $\sigma_{\max}$

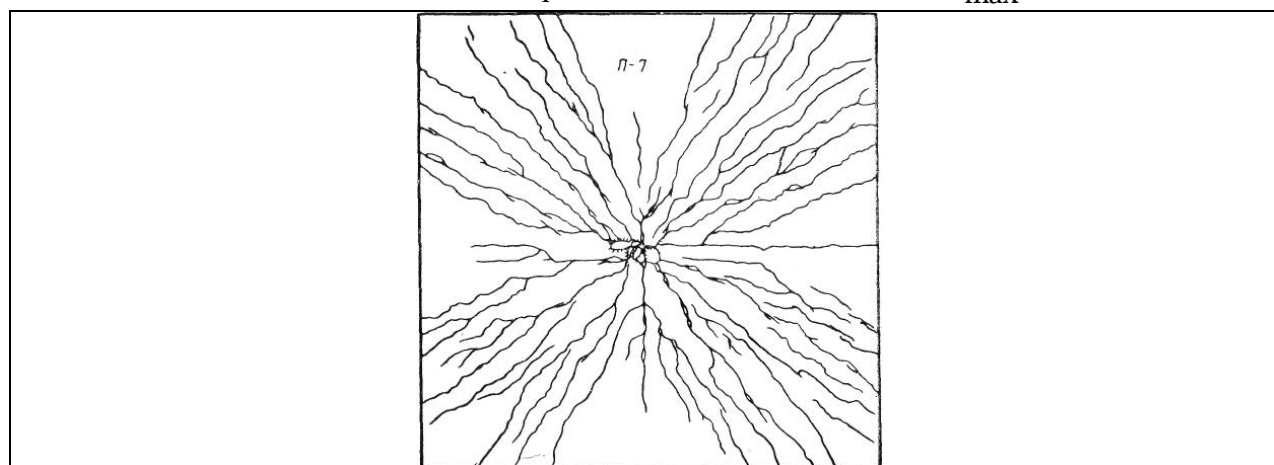


Рис.8.31. Схема трещин (нижняя поверхность)

В направлении траекторий главных растягивающим напряжений идет развитие трещин. По результатам экспериментальных исследований влияния трещин на работу железобетонных плит было отмечено: траектории главных напряжений, **построенные для упругой работы железобетонных плит**, определяют характер (общую направленность) развития трещин на их растянутой поверхности, а величина главных напряжений – последовательность развития трещин. Первые трещины проходят по диагонали плиты, где главные растягивающие напряжения максимальны. В дальнейшем трещины образовывались равномерно по обе стороны диагонали и с ростом нагрузки ширина зоны трещинообразования вдоль диагонали, увеличивалась. (Под траекторией главных напряжений $\sigma_{\max}$ будем понимать линию, в каждой точке которой касательная совпадает с направлением главной площадки, где действует $\sigma_{\max}$.)

8.6 Плита две противоположные кромки свободны, а две другие шарнирно оперты.

На рис.8.32, представлена расчетная схема плиты, нагруженная сосредоточенной силой. На рис. 8.32,б показана изогнутая срединная поверхность плиты (функция прогиба).

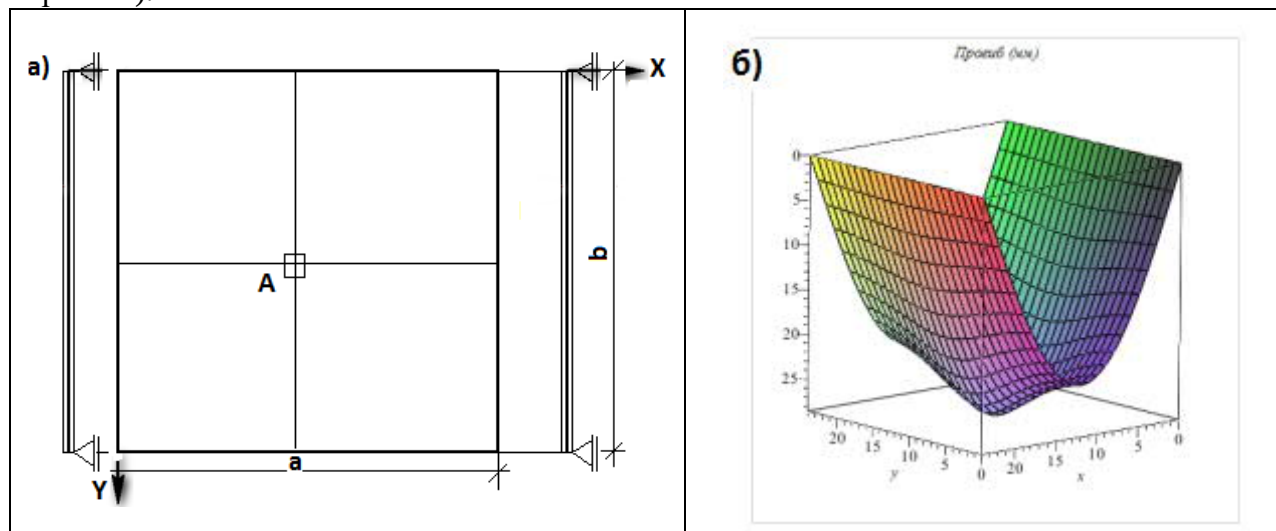


Рис.8.32

На рис. 8.33 показана картина напряженного состояния на нижней поверхности плиты

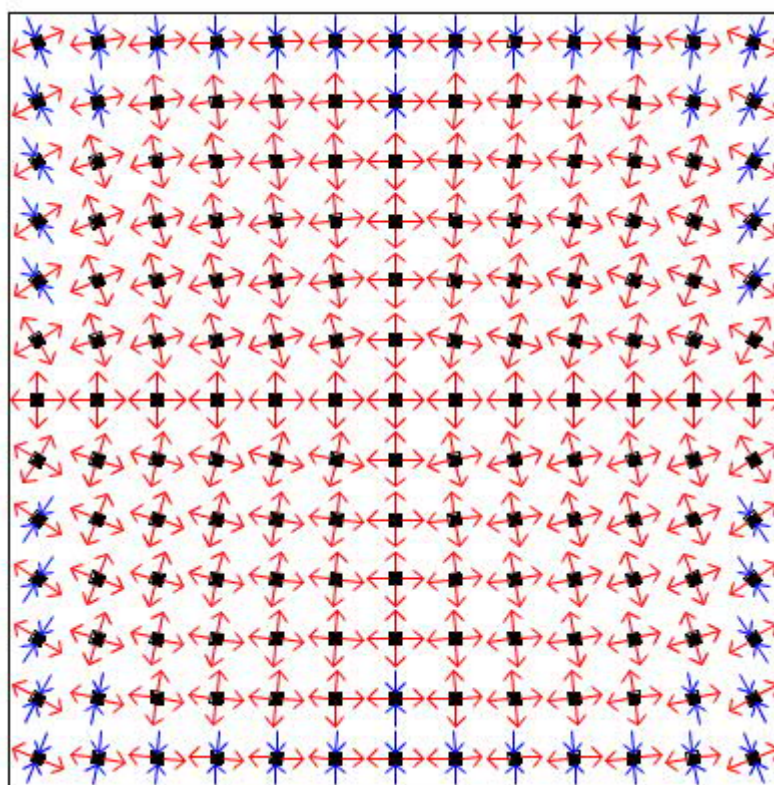


Рис.8.33 Картина напряженного состояния

На рис.8.34 показаны поверхности главных напряжений $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ в точках нижней поверхности плиты. Сопоставляя рис.8.33 и рис.8.34 делаем вывод;

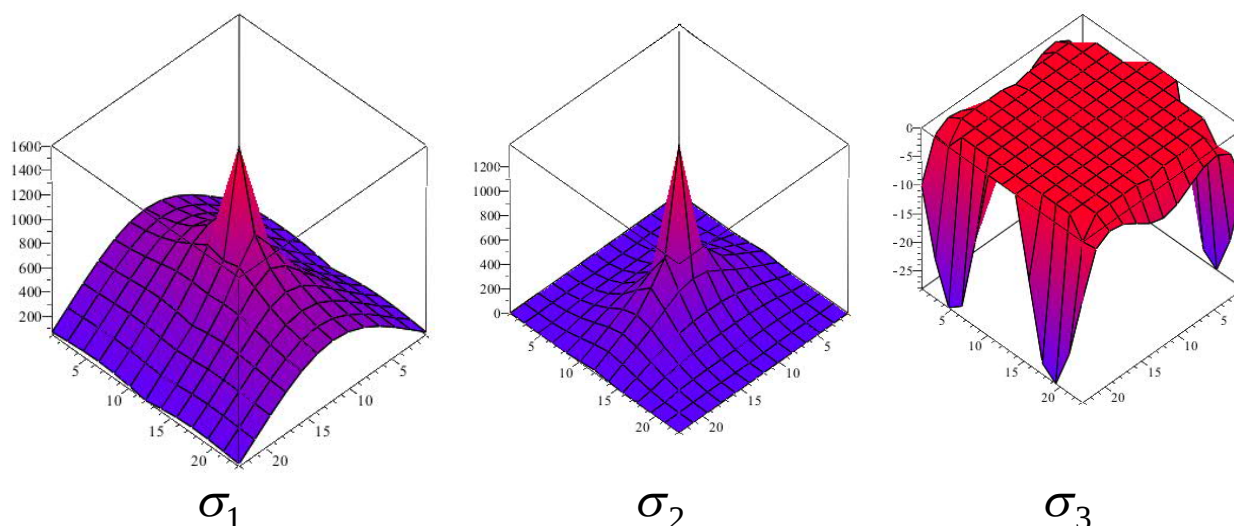


Рис. 8.34 Главные напряжения в точках нижней поверхности плиты

1) самые опасные точки на нижней поверхности плиты в центре ($\sigma_1 > \sigma_2 > 0$, $\sigma_3 = 0$). Имеет место напряженное состояние «растяжение в двух направлениях». При возрастании нагрузки возникнут трещины в направлении перпендикулярном вектору наибольших растягивающих напряжений (в данном случае параллельно оси y).

2) в угловых точках вблизи опор имеет место напряженное состояние «растяжение - сжатие». $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 < 0$. В точках где $|\sigma_1| \approx |\sigma_3|$ возникает напряженное состояние «чистый сдвиг». При возрастании нагрузки в угловых точках вблизи опор могут возникать трещины под углом 45° к оси x и оси y .

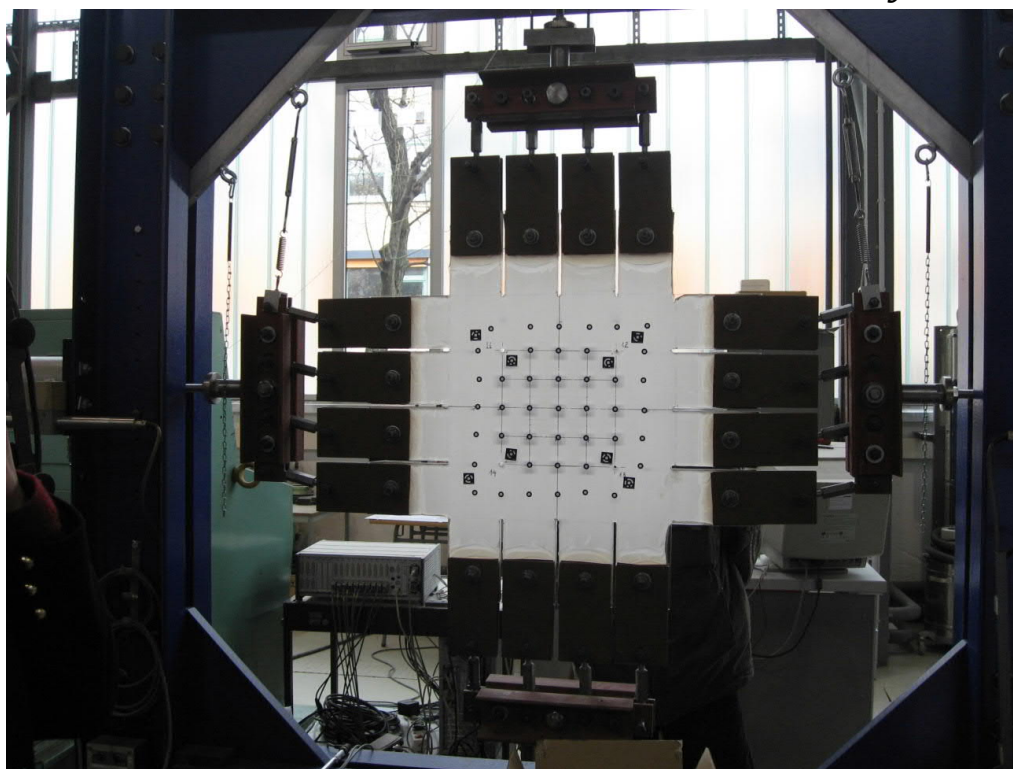


Рис. 8.35 Опыты на плоское напряженное состояние (ПНС)
К рисунку 8.17

Дополнение. Промежуточные выкладки к разделу «8.1 Функция прогиба.»

"Определение константы С (для контроля студентам)"

$$W(x, y) = C \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} W(x, y) = - \frac{4 C \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) x}{a^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, y) = \frac{8 C x^2}{a^4} - \frac{4 C \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)}{a^2}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} W(x, y) = \frac{24 C x}{a^4}, \quad \frac{\partial^4}{\partial x^4} W(x, y) = \frac{24 C}{a^4}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} W(x, y) = - \frac{4 C \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) y}{b^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} W(x, y) = \frac{8 C y^2}{b^4} - \frac{4 C \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)}{b^2}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial y^3} W(x, y) = \frac{24 C y}{b^4}, \quad \frac{\partial^4}{\partial y^4} W(x, y) = \frac{24 C}{b^4}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} W(x, y) = \frac{8 C y x}{b^2 a^2}, \quad \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} W(x, y) = \frac{8 C}{b^2 a^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial x^4} W(x, y) + 2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} W(x, y) \right) + \frac{\partial^4}{\partial y^4} W(x, y) \\ = \frac{8 C (3 b^4 + 2 b^2 a^2 + 3 a^4)}{a^4 b^4} \end{aligned}$$

Подставляем функцию прогиба и ее производные

$$W(x, y) = C \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2$$

в уравнение (8.1),

$$\frac{8 C (3 b^4 + 2 b^2 a^2 + 3 a^4)}{a^4 b^4} = \frac{q}{D}.$$

Находим

$$C = \frac{1}{8} \frac{q a^4 b^4}{D (3 b^4 + 2 b^2 a^2 + 3 a^4)}.$$