

Примеры изгиба пластин

1. Цилиндрический изгиб пластины

Рассмотрим пластину, бесконечно длинную в направлении оси y , нагруженную постоянной в направлении этой оси нагрузкой (рис. 1, а). Вдоль оси x нагрузка может изменяться произвольно – $q = q(x)$.

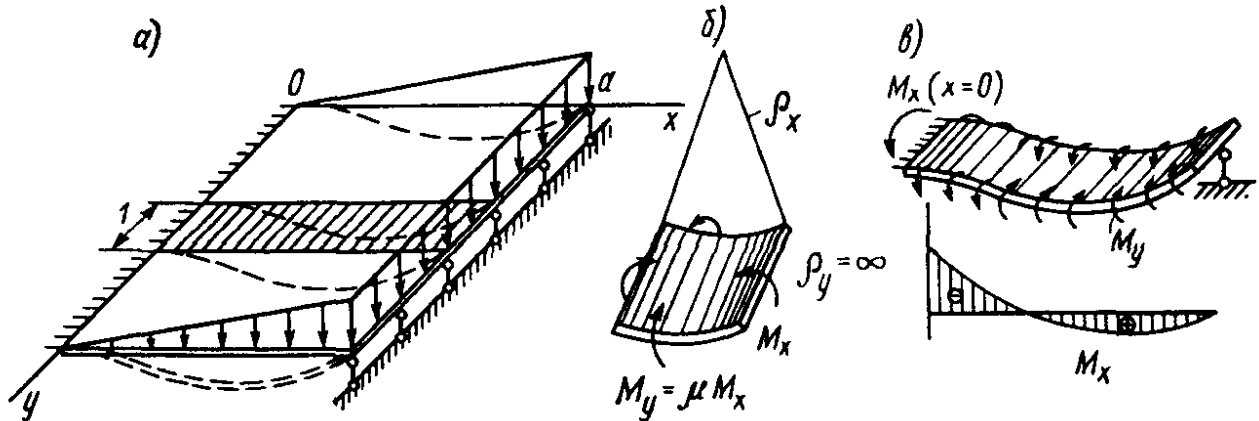


Рис. 1

Все полоски единичной ширины, выделенные из этой пластины, изгибаются одинаково, а пластина в целом изгибается по цилиндрической поверхности $w = w(x)$. Полагая в уравнении Софи Жермен производные по y равными нулю, получим уравнение для w в виде

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q(x)}{D}. \quad (1)$$

Уравнение (1) совпадает с уравнением изгиба балки, у которой жесткость на изгиб $EJ = D$. Поэтому величину D называют цилиндрической жесткостью.

Решение уравнения (1) не представляет труда. Пусть, например, $q = q_0 \frac{x}{a}$, тогда общее решение (1) будет

$$w = w_1 + w_2 = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + \frac{q_0 x^5}{120 a D},$$

где w_1 – общее решение однородного уравнения, w_2 – частное решение неоднородного уравнения, зависящее от вида правой части.

Граничные условия имеют вид

$$x = 0: w = 0; \quad w' = 0; \quad x = a: w = 0; \quad M_x = -D \cdot w'' = 0,$$

где штрихами обозначены производные по x . Из этих четырех условий найдем:

$$C_1 = C_2 = 0; \quad C_3 = \frac{7q_0 a^2}{240D}; \quad C_4 = -\frac{9q_0 a}{240D} \quad \text{и}$$

$$w = \frac{q_0 a^4}{240D} \left(7 \cdot \frac{x^2}{a^2} - 9 \cdot \frac{x^3}{a^3} + 2 \cdot \frac{x^5}{a^5} \right). \quad (2)$$

При цилиндрическом изгибе выражения для моментов будут (рис. 1, б)

$$M_x = -Dw'', \quad M_y = -\nu Dw'' = \nu M_x, \quad H = 0. \quad (3)$$

Подставив (2) в (3), получим

$$M_x = -\frac{q_0 a^2}{120} \left(7 - 27 \cdot \frac{x}{a} + 20 \cdot \frac{x^3}{a^3} \right). \quad (4)$$

Эпюра M_x и моментов $M_y = \nu M_x$ в единичной полосе пластины показаны на рис. 1, в.

2. Чистый изгиб пластины

Рассмотрим прямоугольную пластину, свободную от закреплений, на контуре которой приложены изгибающие моменты $M_x = m_1 = \text{const}$ и $M_y = m_2 = \text{const}$ (рис. 2, а).

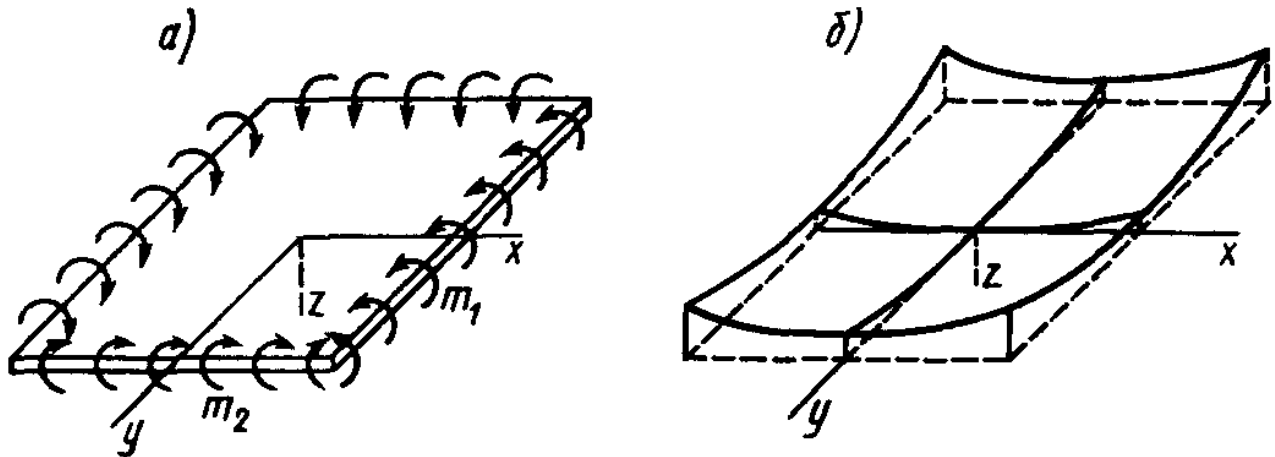


Рис. 2

Начало координат поместим в центре пластины. Для определения прогибов имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0,$$

решение которого примем в виде

$$w = 0.5 C_1 x^2 + 0.5 C_2 y^2. \quad (5)$$

Постоянные C_1 и C_2 найдем из условий

$$M_x = -D(C_1 + \nu C_2) = m_1; \quad M_y = -D(C_2 + \nu C_1) = m_2; \quad H = 0. \quad (6)$$

Решая эти два уравнения, найдем

$$C_1 = \frac{\nu m_2 - m_1}{D(1 - \nu^2)}; \quad C_2 = \frac{\nu m_1 - m_2}{D(1 - \nu^2)},$$

и после подстановки в (5) получим (рис. 2, б)

$$w = \frac{1}{2D(1 - \nu^2)} \left[(\nu m_2 - m_1) x^2 + (\nu m_1 - m_2) y^2 \right]. \quad (7)$$

Во всех сечениях пластины, параллельных осям x и y , действуют только постоянные изгибающие моменты (6). Остальные силовые факторы равны нулю $H = Q_x = Q_y = 0$. Рассмотрим частные случаи. Пусть $m_1 = m_2 = m$. Тогда

$$w = -\frac{m}{2D(1+\nu)}(x^2 + y^2). \quad (8)$$

Это уравнение параболоида вращения. Искривленная пластина в этом случае представляет собой часть сферы, так как радиусы кривизны будут одинаковы во всех плоскостях и во всех точках пластины. Параболоид (8), очень близкий к сфере, получился в результате использования приближенных линейных уравнений (также, как при чистом изгибе балки из линейного уравнения её изогнутая ось получается очерченной по квадратной параболе вместо окружности).

Рассмотрим другой частный случай $m_1 = m$, $m_2 = 0$ (рис. 3, а).

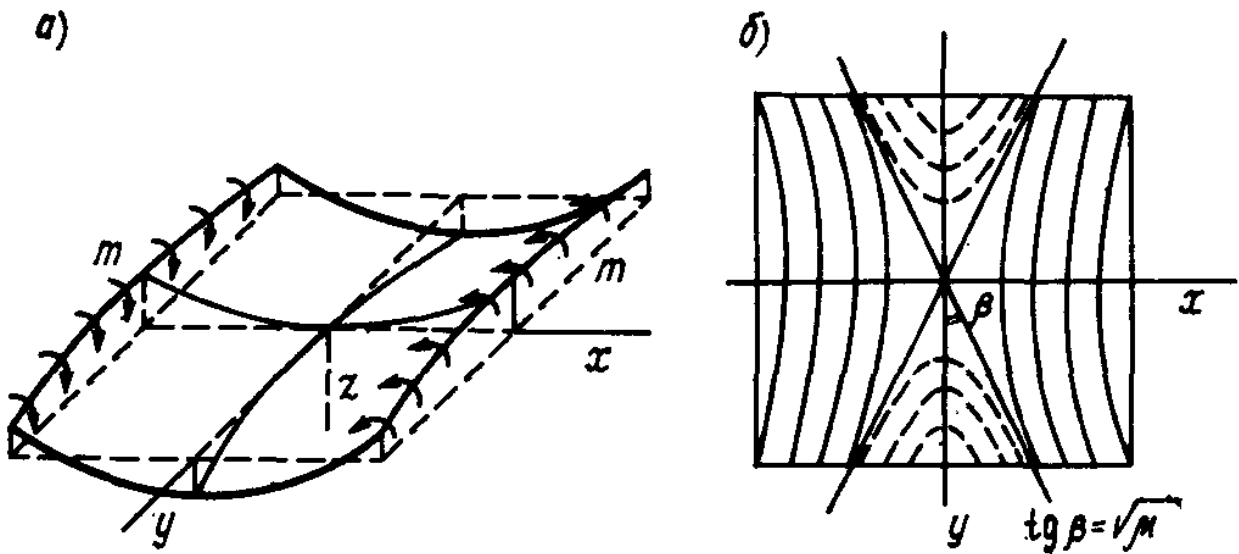


Рис. 3

Уравнение (7) получает вид

$$w = \frac{m}{2D(1-\nu^2)}(-x^2 + \nu y^2). \quad (9)$$

Поверхность, описываемая этим уравнением, имеет седлообразную форму и называется гиперболическим параболоидом. Горизонталями этой поверхности являются гиперболы, асимптотами которых служат прямые $x = \pm\sqrt{\nu} \cdot y$ (рис. 3, б). Благодаря влиянию коэффициента Пуассона, пластина изгибается не только в плоскости действия моментов $M_x = m$, но получает и обратный выгиб в перпендикулярной плоскости.

Рассмотрим далее случай $m_1 = m$, $m_2 = -m$ (рис. 4, а). Тогда

$$w = \frac{m}{2D(1-\nu)}(-x^2 + y^2). \quad (10)$$

Это также гиперболический параболоид с асимптотами, наклоненными к осям x и y под углом $\alpha=45^\circ$.

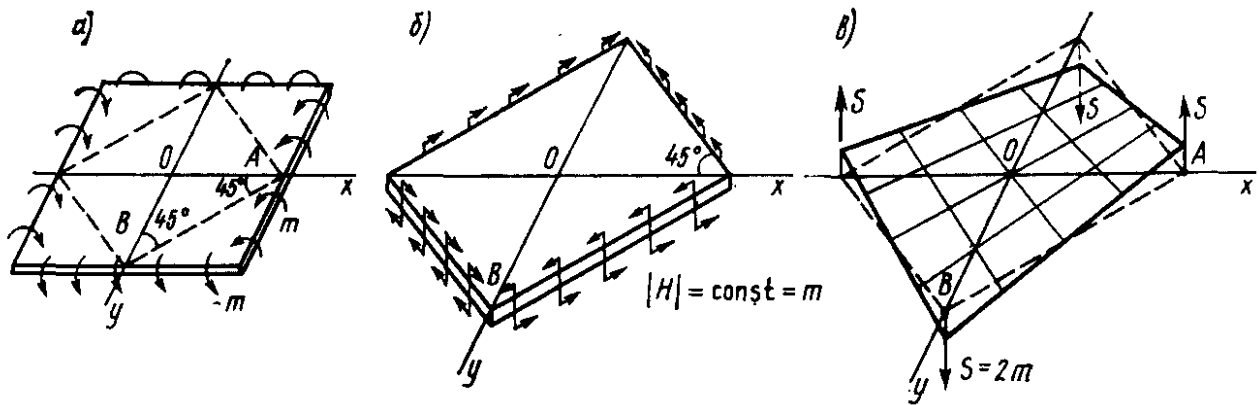


Рис. 4

Можно показать, что в сечениях, параллельных асимптотам, изгибающий момент равен нулю $M_\alpha = 0$, а крутящий момент $H_\alpha = -m$. Таким образом, часть пластины, выделенная из рассматриваемой сечениями, равно наклоненными к осям x и y , будет загружена на контуре крутящими моментами интенсивности m (рис. 4, б). Если заменить пары крутящих моментов обобщенной поперечной нагрузкой $Q_\alpha^{об}$, то на всей длине кромок получим $Q_\alpha^{об} = 0$, а в угловых точках будут приложены сосредоточенные силы $S=2m$ (рис. 4, в). Таким образом, для модели пластины, подчиняющейся гипотезам Кирхгофа–Лява, приложение системы самоуравновешенных сил в углах прямоугольной пластины создает деформацию чистого кручения, поскольку по всей поверхности пластины крутящий момент постоянен $H=m=const$.

Решение в двойных тригонометрических рядах (решение Навье)

Это решение получено для задачи изгиба прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по всему контуру (рис. 15). Поперечная нагрузка $q(x,y)$ предполагается изменяющейся по любому закону.

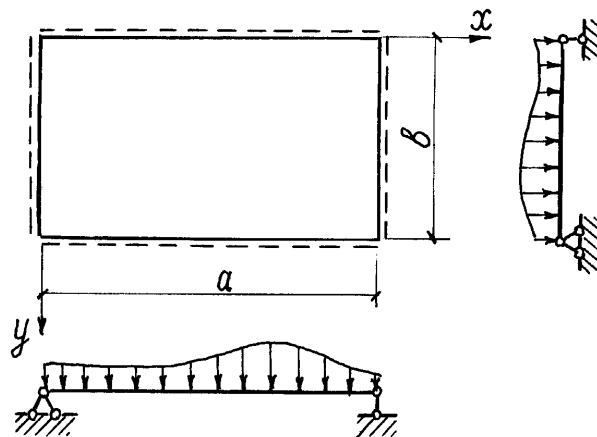


Рис. 5

Функцию прогибов $w(x, y)$ будем искать в виде двойного тригонометрического ряда

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (11)$$

$m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$

Задача заключается в определении коэффициентов A_{mn} ряда (11).

Проверим выполнение граничных условий. При шарнирном опирании имеем:

при $x = 0$ и $x = a$: $w = 0$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$;

при $y = 0$ и $y = b$: $w = 0$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$.

При $x = 0$ $\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin 0^\circ = 0$ и при $x = a$ $\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin m\pi = 0$. Аналогично, при $y = 0$ и $y = b$ получаем $\sin \frac{n\pi y}{b} = 0$. Таким образом, прогибы на гранях пластинки отсутствуют.

Запишем вторые производные прогибов:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Эти производные, как и прогибы, содержат множители $\sin \frac{m\pi x}{a}$ и $\sin \frac{n\pi y}{b}$, следовательно, при $x = 0$, $x = a$ и при $y = 0$, $y = b$ также обращаются в ноль. Таким образом, функция (11) удовлетворяет всем граничным условиям и может быть принята для решения задачи.

Для определения коэффициентов A_{mn} возьмем четвертые производные функции прогибов:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

и подставим их в уравнение Софи Жермен. После преобразований получим

$$D\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q(x, y). \quad (12)$$

Представим нагрузку $q(x, y)$ также в виде двойного тригонометрического ряда по синусам

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (13)$$

Замечательным свойством синусоидальных базисных функций, из которых образован данный ряд, является их взаимная ортогональность. Состоит она в том, что интеграл по площади пластины от произведения этих функций при двух парах целых чисел m, n и m_1, n_1

$$\int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m_1\pi x}{a} \sin \frac{n_1\pi y}{b} dx dy$$

принимает лишь два значения: 0, если $m_1 \neq m$ или $n_1 \neq n$, и $ab/4$, если $m_1 = m$, $n_1 = n$. Это свойство позволяет легко написать формулу для C_{mn} при произвольно заданной нагрузке $q(x, y)$. Действительно, умножим обе части равенства (13) на $\sin \frac{m_1\pi x}{a} \sin \frac{n_1\pi y}{b}$ и проинтегрируем по площади пластины. Если теперь придадим m_1, n_1 конкретные значения m, n , то все слагаемые в правой части окажутся равными нулю, кроме одного со значениями m, n . Тогда из этого равенства найдем

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (14)$$

Подставляя (13) в (12), получим

$$\begin{aligned} D\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

или

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[D\pi^4 A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - C_{mn} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0.$$

Это равенство возможно только при условии, что все коэффициенты в квадратных скобках равны нулю, т.е.

$$D\pi^4 A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = C_{mn}.$$

Отсюда находим

$$A_{mn} = \frac{C_{mn}}{D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

или, с учетом выражения для C_{mn} , получим:

$$A_{mn} = \frac{4}{D\pi^4 ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (15)$$

Выражения для внутренних усилий будут иметь вид

$$\begin{aligned} M_x &= \pi^2 D \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \nu \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ M_y &= \pi^2 D \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \left[\left(\frac{n}{b} \right)^2 + \nu \left(\frac{m}{a} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ H &= -\frac{\pi^2 D (1-\nu)}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} m n \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}; \\ Q_x &= \frac{\pi^3 D}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} m \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ Q_y &= \frac{\pi^3 D}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} n \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (16)$$

Обобщенные поперечные силы на краях $x=0, a$ и $y=0, b$ (опорные реакции) будут

$$\begin{aligned} Q_x^{об} = V_x &= \left(Q_x + \frac{\partial H}{\partial y} \right)_{x=0,a} = \frac{\pi^3 D}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} m \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + (2-\nu) \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{m\pi x}{a}; \\ Q_y^{об} = V_y &= \left(Q_y + \frac{\partial H}{\partial x} \right)_{y=0,b} = \frac{\pi^3 D}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} n \left[\left(\frac{n}{b} \right)^2 + (2-\nu) \left(\frac{m}{a} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай изгиба пластинки под действием равномерно распределенной по всей поверхности нагрузки $q(x, y) = q = const$.

Тогда

$$\int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = q_0 \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy = 4q \frac{ab}{mn \cdot \pi^2}$$

и

$$A_{mn} = \frac{16q}{D\pi^6 mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots) \dots$$

Таким образом, функция прогибов (11) принимает вид:

$$w(x, y) = \frac{16q}{D\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}, \quad (m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots) \dots \quad (17)$$

Максимальный прогиб в центре пластинки (при $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$) составляет

$$w_{\max} = \frac{16q}{D\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots),$$

или, с учетом $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$,

$$w_{\max} = \frac{192q}{\pi^6 Eh^3} (1-\nu^2) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Эти ряды достаточно быстро сходятся.

При подстановке функции прогибов (17) в выражения для изгибающих моментов из (16) получим:

$$M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 + \nu n^2 \frac{a^2}{b^2}}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

(m = 1, 3, 5, ...; n = 1, 3, 5, ...).

Максимальные изгибающие моменты достигают наибольшего значения в центре пластинки:

$$M_x^{\max} = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 + vn^2 \frac{a^2}{b^2}}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2};$$

$$M_y^{\max} = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \frac{a^2}{b^2} + vm^2}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2},$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Эти ряды сходятся медленнее, чем для прогибов.

При найденной функции прогибов поперечные силы принимают следующий вид:

$$Q_x = \frac{16qa}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)};$$

$$Q_y = \frac{16qb}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{m \left(m^2 \frac{b^2}{a^2} + n^2 \right)};$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Наибольшие значения поперечных сил достигаются в серединах сторон пластинки. Так, Q_x принимает наибольшее значение при $x = 0$, а и $y = \frac{b}{2}$:

$$Q_x^{\max} = \frac{16qa}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)}, (m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Q_y принимает наибольшее значение при $x = \frac{a}{2}$; $y = 0$, b :

$$Q_y^{\max} = \frac{16qb}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m \left(m^2 \frac{a^2}{b^2} + n^2 \right)}, (m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Ряды для поперечных сил сходятся еще медленнее, чем для изгибающих моментов.

Рассмотрим действие сосредоточенной силы P в точке с координатами x_p, y_p (рис. 6).

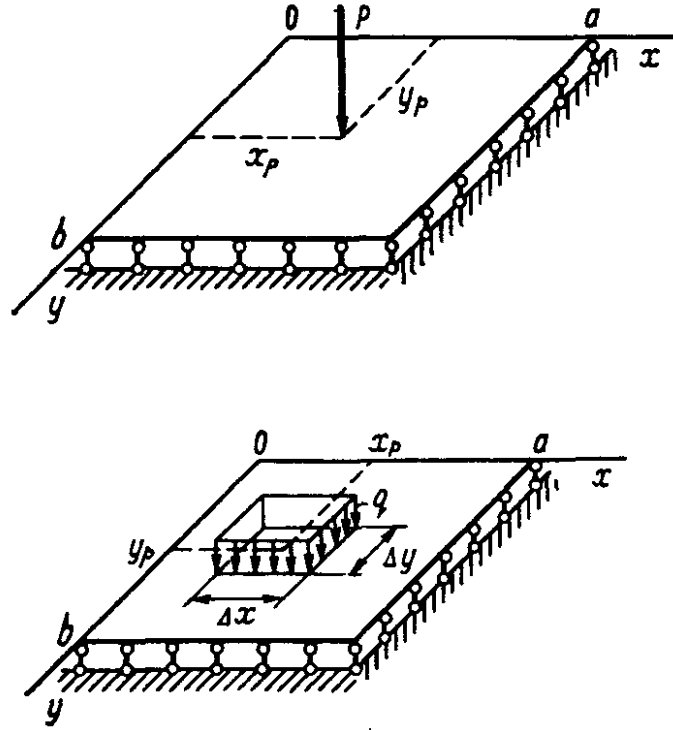


Рис. 6

Представим, что сила P распределена по площади $\Delta x \Delta y$, тогда в точке с координатами x_p, y_p произведение $q \Delta x \Delta y = P$, а во всех остальных точках площади пластины равно нулю. В результате получим

$$\int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = P \sin \frac{m\pi x_p}{a} \sin \frac{n\pi y_p}{b}.$$

Подставляя это выражение в (15), найдем коэффициенты ряда (11)

$$A_{mn} = \frac{4P \sin \frac{m\pi x_p}{a} \sin \frac{n\pi y_p}{b}}{D\pi^4 ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

и после подстановки их в (11) функцию прогибов пластинки

$$W(x, y) = \frac{4P}{D\pi^4 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_p}{a} \sin \frac{n\pi y_p}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (18)$$

Ряд (18) сходится сравнительно быстро. Зная прогибы $W(x, y)$ можно получить выражения для изгибающих моментов, поперечных сил и крутящих моментов. Ряды,

входящие в эти выражения, сходятся очень плохо, а под силой P вообще расходятся. Последнее обстоятельство объясняется самой постановкой задачи.

