

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ГИПОТЕЗЫ

Оболочкой называется тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми (толщина оболочки) мало по сравнению с размерами в плане. Поверхность, делящая оболочку пополам по толщине, называется срединной. Ограничимся рассмотрением оболочек постоянной толщины. В этом случае геометрия оболочки полностью определяется геометрией срединной поверхности.

Оболочки широко используются в различных областях техники. Перекрытия промышленных зданий, выставочных павильонов, спортивных и зрелищных сооружений, емкости для хранения жидкостей и газов, элементы двигателей, летательных аппаратов и судов

При сравнительно небольшом весе оболочки обладают высокой прочностью и жесткостью.

На рис. 1 показан элемент срединной поверхности оболочки. На элементе изображены линии пересечения двух взаимно перпендикулярных плоскостей, нормальных к срединной поверхности, т. е. проходящих через нормаль ν . Эти линии (A_1MB_1 и A_2MB_2) представляют собой кривые, очерченные радиусами R_1 и R_2 . Величины, обратные радиусам,

$$k_1 = 1/R_1 \text{ и } k_2 = 1/R_2$$

называются *кривизнами* оболочки. На срединной поверхности оболочки всегда можно найти две взаимно перпендикулярные линии, кривизны которых обладают свойствами экстремальности: одна из них максимальна, а другая — минимальна. Кривизны, обладающие свойствами экстремальности, называются *главными*. Они обозначаются индексами 1 и 2. Геометрия поверхности оболочки характеризуется гауссовой кривизной, которая представляет собой произведение главных кривизн:

$$\Gamma = k_1 k_2.$$

Различают оболочки *положительной* гауссовой кривизны (сферические, эллиптические; рис. 2, а); *нулевой* гауссовой кривизны (цилиндрические, конические; рис. 2, б); *отрицательной* гауссовой кривизны

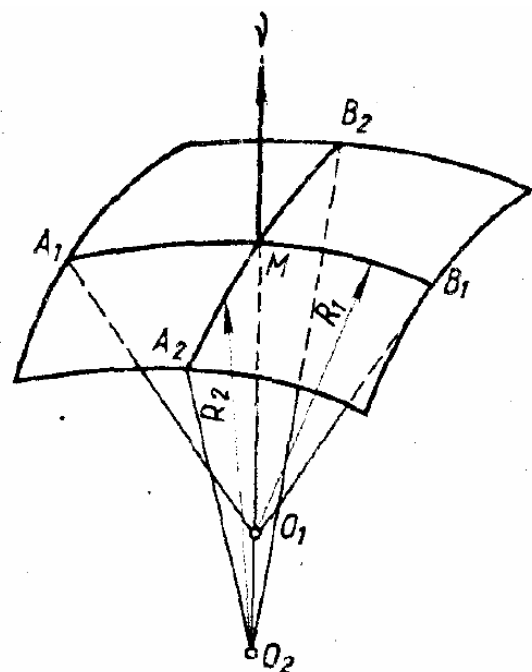


Рис. 1

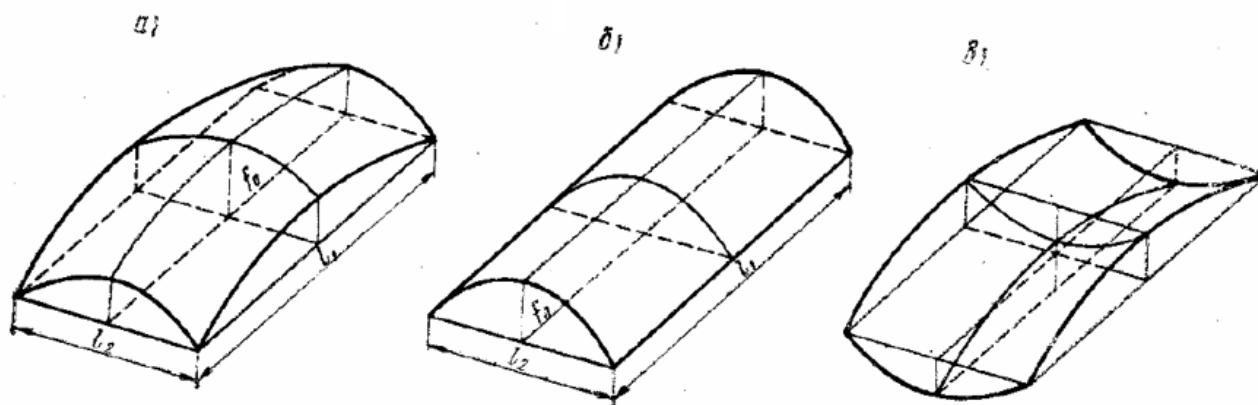


Рис. 2

(гиперболические; рис. 2 , а); смешанной кривизны, т. е. состоящие из участков с различной гауссовой кривизной (торообразные).

Произвольная нагрузка вызывает в оболочках две группы усилий: 1) нормальные N_1 , N_2 и сдвигающие S_1 , S_2 силы, действующие в плоскостях, касательных к срединной поверхности; 2) изгибающие M_1 , M_2 и крутящие M_{12} , M_{21} моменты, а также поперечные силы Q_1 , Q_2 .

В отличие от пластинок оболочки работают главным образом на растяжение и сжатие, а не на изгиб и кручение, что позволяет более выгодно использовать материал.

Расчет оболочек в общем случае представляет собой очень сложную задачу, в связи с чем при ее решении часто используются различные упрощения.

Если напряжения, вызываемые изгибом оболочки, малы по сравнению с напряжениями, обусловленными деформацией срединной поверхности, то изгибающими и крутящими моментами, а также перерезывающими силами пренебрегают и определяют только усилия в срединной поверхности. Такая теория носит название *безмоментной теории оболочек*.

При расчете цилиндрических оболочек, вытянутых в одном направлении, более точные результаты дает *полубезмоментная теория*. В ее основе лежит допущение о малости изгибающего момента M_ξ (ось ξ совпадает с образующей срединной поверхности оболочки) и крутящего момента H .

Упрощение моментной теории (общей теории) оболочек возможно за счет наложения некоторых ограничений на геометрию ее срединной поверхности. Одним из вариантов такой теории является теория пологих оболочек.

В зависимости от отношения толщины к наименьшему радиусу кривизны срединной поверхности оболочки делятся на толстые и тонкие. Оболочки считаются толстыми, если отношение $h/R \geq 1/30$, и тонкими, если $1/30 \geq h/R \geq 1/1000$.

Теория расчета тонких оболочек основывается на следующих гипотезах:

а) прямолинейный элемент, нормальный к срединной поверхности, остается прямолинейным и нормальным к ней после деформирования оболочки и не меняет свою длину (гипотеза прямых нормалей);

б) нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности оболочки, пренебрежимо малы по сравнению с остальными напряжениями и при расчете не учитываются.

Положение точки на поверхности можно определить по координатам в декартовой системе координат

$$z = f(x, y).$$

Однако целесообразно систему координат связать с самой поверхностью, выбрав на ней две системы координатных линий ξ, η . В качестве таких линий чаще всего выбираются линии кривизн, которые образуют на поверхности ортогональную сетку (рис. 3, а, б). Параметры ξ, η называются *криволинейными координатами точек поверхности*.

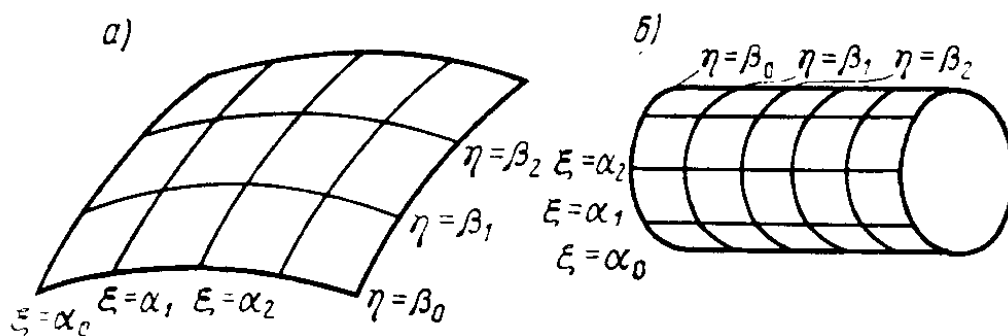


Рис. 3

ПОЛОГИЕ ОБОЛОЧКИ

Пологие оболочки находят широкое применение в технике и особенно в строительстве.

Пологими оболочками называются оболочки, имеющие небольшой подъем над плоскостью, на которую они опираются. Например, прямоугольную в плане оболочку (рис. 4) можно считать полой, если $f/a \leq 1/5$, где f — стрела подъема оболочки; a — ее наименьший размер в плане.

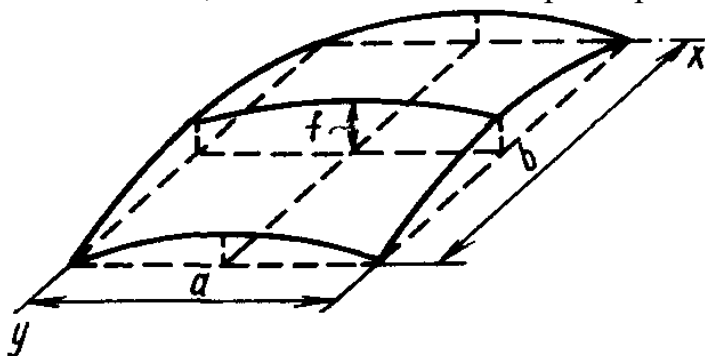


Рис. 4

Геометрию срединной поверхности пологой оболочки можно отождествить с геометрией плоскости, на которую она опирается. В этом случае криволинейные координаты, откладываемые вдоль главных кривизн, можно считать совпадающими с декартовыми координатами x, y на плоскости.

Если принять, что срединная поверхность описывается в осях выражением

$$z = f(x, y),$$

то главные кривизны могут быть найдены так:

$$k_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad k_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Гауссову кривизну для пологих оболочек приближенно можно считать равной нулю.

Найдем выражения деформации в любой точке оболочки через деформации срединной поверхности

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot z, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot z, \quad \gamma = \gamma^0 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \cdot z \quad (2)$$

а деформации ε_x^0 , ε_y^0 , γ^0 представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w; & \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w; \\ \gamma^0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь u, v, w — перемещения точек срединной поверхности в направлении координатных осей.

Происхождение дополнительных слагаемых в выражениях деформаций ε_x^0 , ε_y^0 можно объяснить, рассмотрев положение элементарного участка координатной линии x в недеформированном и деформированном состояниях (рис. 5).

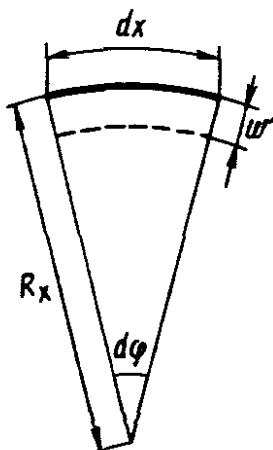


Рис. 5

В исходном (недеформированном) состоянии радиус кривизны элемента равен $R_x = 1/k_x$, а в деформированном состоянии он равен разности: $R'_x = R_x - w$. Отсюда следует, что относительная деформация элемента, обусловленная только его смещением, равна

$$\varepsilon_x^0 = \frac{(R_x - w) d\varphi - R_x d\varphi}{R_x d\varphi} = -\frac{w}{R_x} = -k_x w.$$

Аналогично можно показать, что

$$\varepsilon_y^0 = -k_y w.$$

Найденные деформации ε_x , ε_y , γ должны удовлетворять уравнениям совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

После подстановки сюда выражений (2) получим

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma^0}{\partial x \partial y} = k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Здесь предполагается, что $k_x = k_x(x)$, $k_y = k_y(y)$.

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим элемент оболочки на боковых гранях которого действуют усилия в срединной поверхности (рис. 6, а), а также моменты и поперечные силы (рис. 6, б).

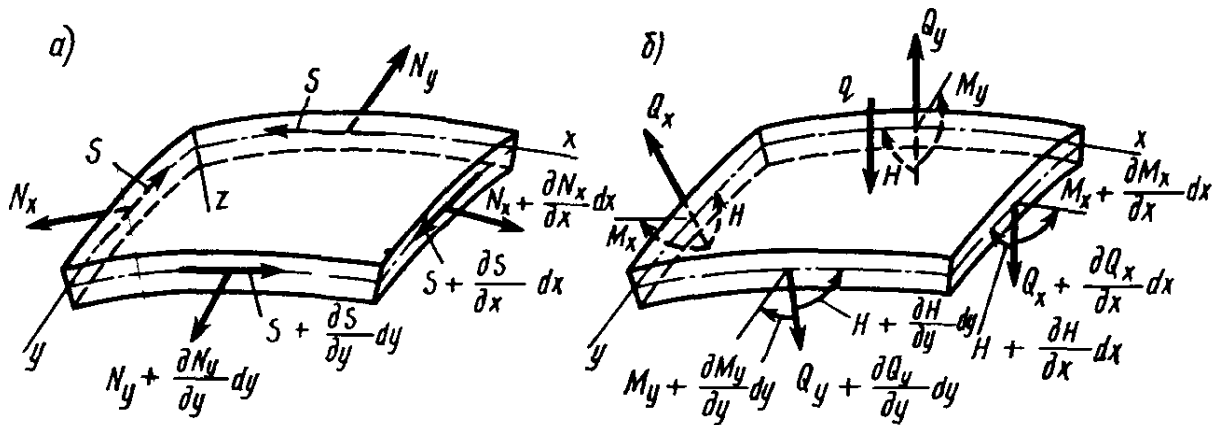


Рис. 6 Составим уравнение проекций на ось X.

Из-за малости соответствующих углов усилия в срединной поверхности элемента проецируются в натуральную величину, а проекции поперечных сил пренебрежимо малы:

$$\sum X = -N_x dy + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy - S dx + \left(S + \frac{\partial S}{\partial y} dy \right) dx = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Уравнение равновесия в виде суммы моментов относительно той же оси представляется так:

$$\begin{aligned} & -M_y dx + \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - H dy + \\ & + \left(H + \frac{\partial H}{\partial x} dx \right) dy - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx dy - \\ & - \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy \frac{1}{2} dy - q dx dy \frac{1}{2} dy = 0. \end{aligned}$$

Отбросив малые высшего порядка, найдем

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} - Q_y = 0. \quad (6)$$

Аналогично можно получить уравнения равновесия, проецируя все силы на направление касательной к координатной линии y и определяя сумму моментов относительно нее:

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

и

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x = 0. \quad (8)$$

Далее запишем уравнение суммы проекций всех сил на ось z . Нетрудно убедиться в том, что в этом уравнении кроме тех слагаемых, которые фигурировали в таком же уравнении равновесия для пластин, появляются дополнительные слагаемые (рис. 7) вида $(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx)k_x dx dy, \dots$ Опуская члены более высокого порядка малости, представим уравнение следующим образом:



Рис. 7

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x k_x + N_y k_y = -q. \quad (9)$$

Продифференцируем обе части уравнения (6) по y , а обе части уравнения (8) — по x и подставим выражения для производных $\partial Q_x/\partial x$ и $\partial Q_y/\partial y$ в уравнение (9). В результате получим

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x k_x + N_y k_y = -q. \quad (10)$$

РАЗРЕШАЮЩАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Запишем выражения для изгибающих и крутящих моментов через прогиб оболочки (для пологой оболочки они будут такими же, как для жесткой пластинки)

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); & M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ H &= -(1 - \mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Далее подставим эти выражения в уравнение (10). В итоге получим

$$D\nabla^4 w - N_x k_x - N_y k_y = q. \quad (12)$$

Теперь неизвестными остались три усилия в срединной поверхности N_x , N_y , S и прогиб w , для определения которых используются четыре уравнения: (4), (5), (7), (12).

Для сокращения числа неизвестных введем функцию напряжений, действующих в срединной поверхности оболочки:

$$\sigma_x^0 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y^0 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau^0 = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

причем

$$\sigma_x^0 = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x^0 + \mu \epsilon_y^0); \quad \sigma_y^0 = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_y^0 + \mu \epsilon_x^0); \quad \tau^0 = G \gamma^0.$$

Усилия N_x , N_y , S связаны с функцией Φ соотношениями

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad S = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad (13)$$

где $\Phi = \delta \phi$.

С помощью функции напряжений уравнения равновесия (5), (7) удовлетворяются тождественно. Выразим деформации ϵ_x^0 , ϵ_y^0 , γ^0 через функцию Φ и подставим полученные выражения в уравнение совместности деформаций (4). В итоге придем к уравнению

$$\frac{1}{E\delta} \nabla^4 \Phi = -k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (14)$$

С учетом равенств (13) уравнение равновесия (12) принимает вид

$$D\nabla^4 w - k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = q. \quad (15)$$

В итоге имеем систему двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций: w и Φ .

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Решение уравнений (14-15) должно удовлетворять граничным условиям, которые формулируются для всех кромок оболочки. Рассмотрим особенности записи их на примере полой оболочки, прямоугольной в плане. Допустим, что кромки оболочки совпадают с координатными линиями x , y , являющимися линиями кривизны. На каждой кромке оболочки накладываются ограничения на функции w и Φ , причем таких условий должно быть четыре — по два условия на каждую из функций w и Φ .

Возьмем для примера кромку оболочки, совпадающую с координатной линией y (для точек этой кромки $x \equiv 0$). Запишем различные варианты граничных условий для кромки. Заметим, что краевые

условия, зависящие от прогиба оболочки, имеют точно такой же вид, что и для жестких пластинок.

Напомним, что для жестко заземленной кромки пластины справедливы условия

$$w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

а для шарнирно закрепленной —

$$w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Рассмотрим наиболее характерные граничные условия, которые накладываются на функцию Φ (или на перемещения в направлении осей x и y).

1. Точки кромки свободно смещаются в направлении оси x . Это означает, что

$$\sigma_x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

2. Точки кромки свободно смещаются в направлении оси y . Тогда

$$\tau_{xy} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0.$$

3. Отсутствуют перемещения точек кромки в направлении оси x , т. е.

$$u = 0.$$

4. Отсутствуют перемещения точек кромки в направлении оси y , т. е.

$$v = 0.$$

Заметим, что граничные условия для других кромок оболочки формулируются аналогично.

При опирании оболочки на диафрагмы, абсолютно жесткие по отношению к деформациям в своей плоскости и гибкие из нее, граничные условия принимают вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0; \quad v = w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Если же кромки оболочки могут свободно перемещаться вдоль этой диафрагмы, тогда имеем

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0; \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$