

Пример расчёта на изгиб гибкой прямоугольной пластинки

Рассмотрим прямоугольную пластину при действии на нее равномерно распределенной нагрузки q (рис. 1). Вдоль всех кромок пластина опирается на абсолютно жесткие в своей плоскости диафрагмы и гибкие из нее. Это соответствует следующим граничным условиям: $w = 0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$, $N_x = 0$, $v = 0$ при $x = 0$, $x = a$.

Аналогично можно записать граничные условия для двух других кромок пластины при $y = 0$ и $y = b$.

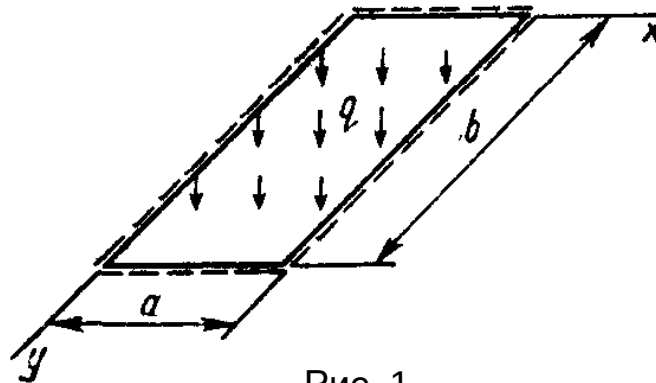


Рис. 1

Рассмотрим систему уравнений Кармана

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{E\delta} \nabla^4 \Phi - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0; \\ D \nabla^4 w - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= q. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В (1)

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad S = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \text{ где } \Phi = \delta \varphi.$$

(см. лекцию №10).

Ищем решение уравнений (1) в виде

$$w = \sum_{m, n} f_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y; \quad (2)$$

$$\Phi = \sum_{i, j} \varphi_{ij} \sin \frac{i\pi}{a} x \sin \frac{j\pi}{b} y, \quad (3)$$

где f_{mn} , φ_{ij} — константы.

Нетрудно убедиться в том, что функции w , Φ удовлетворяют всем граничным условиям.

Для определения постоянных f_{mn} , φ_{ij} воспользуемся методом Бубнова — Галеркина, применение которого в данном случае сводится к следующему.

Подставим разложения (2), (3) в уравнения (1), после чего умножим первое из них на $\sin \frac{i\pi}{a} x \sin \frac{j\pi}{b} y$, а второе — на $\sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$. Интегрируя каждое из полученных выражений по площади пластины и приравнявая, результаты к нулю, придем к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно констант f_{mn} , φ_{ij} .

Особенности такого способа получения решения уравнений (1) проиллюстрируем для случая, когда в разложениях (2), (3) удерживается только один член:

$$\begin{aligned} w &\approx f \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y; \\ \Phi &\approx \varphi \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y. \end{aligned} \quad (4)$$

После подстановки выражений (4) в уравнения (1) получим

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{E\delta} \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 \varphi \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y - \\ &- \frac{\pi^4}{a^2 b^2} f^2 \left(\cos^2 \frac{\pi}{a} x \cos^2 \frac{\pi}{b} y - \sin^2 \frac{\pi}{a} x \sin^2 \frac{\pi}{b} y \right); \\ X_2 &= D \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 f \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y - \\ &- 2 \frac{\pi^4}{a^2 b^2} f \varphi \left(\sin^2 \frac{\pi}{a} x \sin^2 \frac{\pi}{b} y - \cos^2 \frac{\pi}{a} x \cos^2 \frac{\pi}{b} y \right) - q. \end{aligned}$$

Здесь X_1 и X_2 левые части уравнений (1) (во втором уравнении q перенесено в левую часть).

Используя метод Бубнова—Галеркина, умножим X_1, X_2 на $\sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y$ и проинтегрируем по площади пластины:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 \varphi + \frac{16\pi^2 E \delta}{3a^2 b^2} f^2 &= 0; \\ D \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 f - \frac{32\pi^2}{3a^2 b^2} f \varphi &= \frac{16}{\pi^2} q. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Система уравнений (5) сводится к одному уравнению относительно амплитуды прогиба f . Например, при $a/b = 1$ имеем

$$\frac{f}{\delta} + \frac{128(1-\mu^2)}{3\pi^4} \frac{f^3}{\delta^3} = B, \quad (6)$$

где $B = \frac{4qa^4}{\pi^6 D \delta}$.

Уравнение (6) позволяет провести качественный анализ решения задачи об изгибе гибкой квадратной пластины. Для получения более точных результатов необходимо удерживать в разложениях (2), (3) большее число членов.

Для сравнения на рис. 2 показаны графики зависимости $\frac{f}{\delta} \sim B$, отвечающие квадратной в плане жесткой (кривая 1) и гибкой (кривая 2) пластине при $\mu = 0,3$.

Погрешность, равная 10%, в решении для жесткой пластины достигается в этом случае уже при $f/\delta \approx 0,5$.

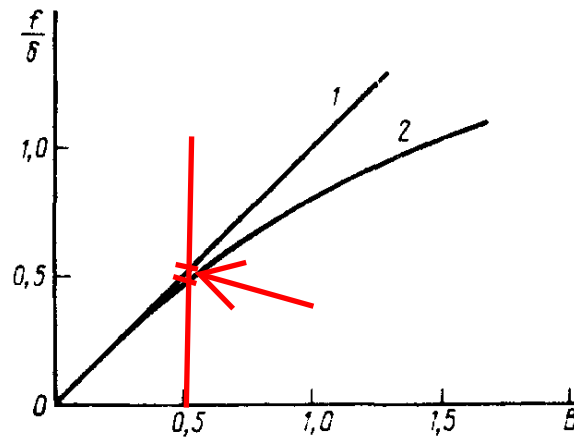


Рис. 2