ПОНЯТИЕ О РАСЧЕТЕ ГИБКИХ ПЛАСТИНОК

Тонкие пластинки, имеющие прогибы более четверти своей толщины, называются гибкими. Для них гипотеза о недеформируемости срединной плоскости оказывается несправедливой, так как в ней появляются деформации растяжения, сжатия и сдвига. Кроме того, усилия срединной плоскости гибкой пластинки зависят от ее прогибов.

При больших прогибах точки срединной плоскости получают перемещения u_0 и v_0 вдоль осей x и y (рис. 1). Тогда формулы (1.6) принимают вид

$$u = u_0 - z\frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = v_0 - z\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Точно так же в формулах (1.7) появляются деформации точек срединной плоскости ε_x^0, ε_y^0 и γ_{xy}^0:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^0 - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

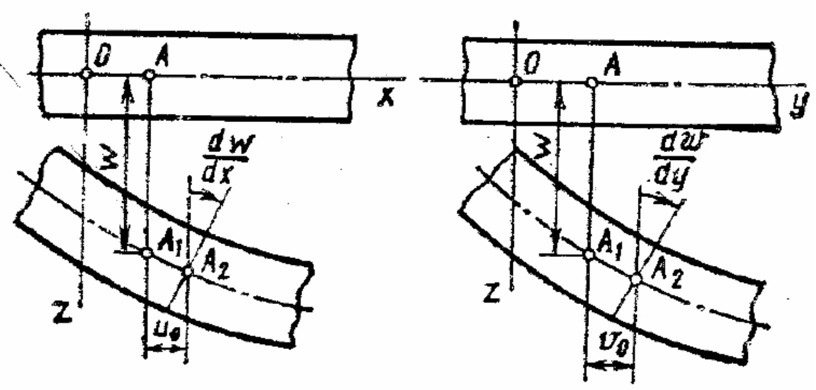

Рис. 1

Эти формулы усложняются еще и тем, что деформации точек срединной плоскости зависят от прогибов нелинейно:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$\gamma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2; \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

соотношения Коши с точностью до малых 2-го порядка

так как в данном случае квадраты производных $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$ и $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$ имеют тот же порядок малости, что и производные $\frac{\partial u_0}{\partial x}$ и $\frac{\partial v_0}{\partial y}$.

Напряжения в гибкой пластинке приводятся не только к изгибающим и крутящим моментам и поперечным силам но и к нормальным и сдвигающим силам в срединной плоскости (рис. 2):

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right];$$

$$N_y = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right];$$

$$S_x = S_y = S = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

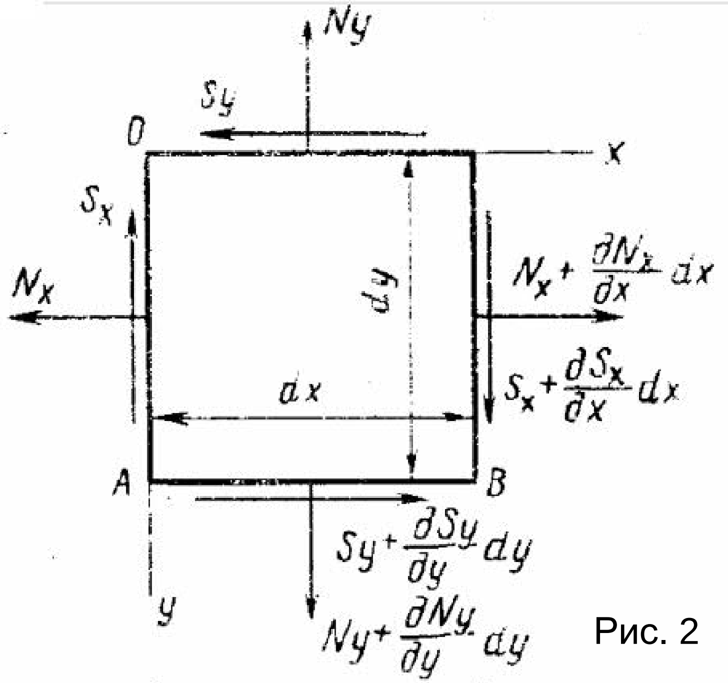

Рис. 2

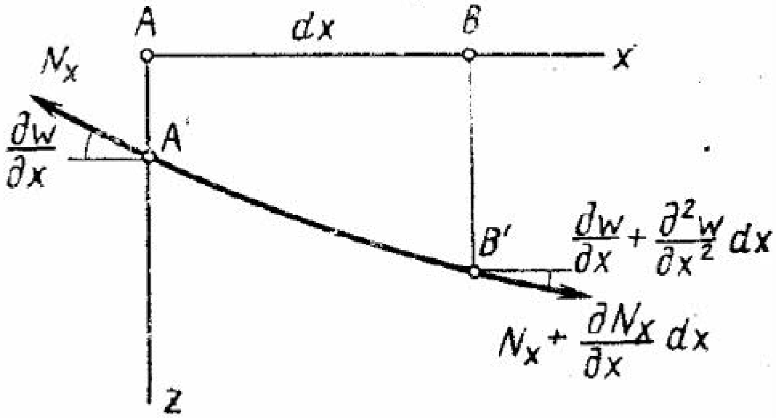

Рис. 3

Записанные формулы содержат неизвестные составляющие перемещений точек срединной плоскости u_0 и v_0. Исключая эти перемещения, получаем уравнение неразрывности деформаций, связывающее усилия в срединной плоскости пластинки:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(N_x - \nu N_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(N_y - \nu N_x) - 2(1-\nu)\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = Eh\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]. \quad \text{(a)}$$

Составим уравнения равновесия бесконечно малого элемента срединной плоскости гибкой пластинки, находящейся как под действием поперечных сил (см. рис.2.1), так и под действием сил в ее срединной плоскости (рис. 2). Проекция сил на ось x дает

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y - N_x\,\mathrm{d}y + \left(S_y + \frac{\partial S_y}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x - S_y\,\mathrm{d}x = 0,$$

откуда после упрощения и деления на $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ находим

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} = 0. \qquad (б)$$

Аналогично из уравнения проекций на ось y получаем

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \qquad (в)$$

При проецировании сил на ось z гибкую пластинку следует рассматривать в деформированном состоянии. На рис. 3 показано сечение плоскостью, параллельной xOz, бесконечно малого элемента срединной плоскости пластинки после искривления. В этой плоскости видны силы

$$N_x\,\mathrm{d}y \quad \text{и} \quad \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,$$

углы наклона которых относительно оси x соответственно равны

$$\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x.$$

При проектировании учтем, что косинус малого угла равен единице, а синус — самому углу, т. е. в данной плоскости

$$\sin\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \approx \frac{\partial w}{\partial x};$$

$$\sin\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\right) \approx \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Спроецируем нормальные силы в рассматриваемой плоскости на ось z:

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\right) - N_x\,\mathrm{d}y\,\frac{dw}{\partial x}\ .$$

После упрощения и отбрасывания величин третьего порядка малости получим

$$\left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \qquad (\text{г})$$

Аналогично можно получить проекцию на ось z нормальных сил в плоскости yOz:

$$\left(N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \qquad (\text{д})$$

Расположение касательных сил после деформации гибкой пластинки показано на рис. 4 . На том же рисунке показаны углы, составляемые этими силами с координатной плоскостью xOy. Спроецируем эти силы на ось z:

$$\left(S_x + \frac{\partial S_x}{\partial x} \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \mathrm{d}x\right) - S_x \mathrm{d}y \frac{\partial w}{\partial y} + \left(S_y + \frac{\partial S_y}{\partial y} \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \mathrm{d}y\right) - S_y \mathrm{d}x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

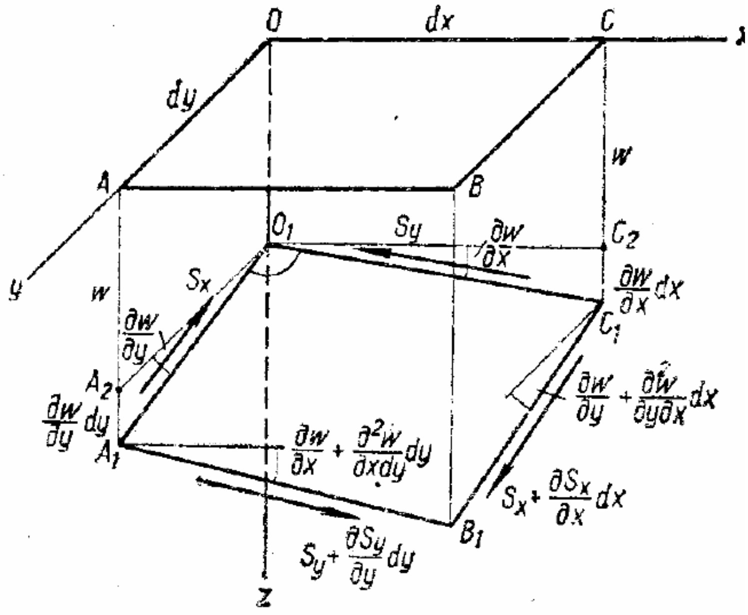

Рис. 4

После упрощения и отбрасывания величин третьего порядка малости с учетом закона парности касательных усилий ($S_x = S_y = S$) получим

$$\left(2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x}\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \qquad (\text{е})$$

На проекцию поперечных усилий искривление пластинки не влияет, поэтому берем ее в форме (2.2). Добавляя к этой зависимости проекции (г)—(е), разделенные на $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, после соответствующей группировки получаем

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y}\right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x}\right) \frac{\partial w}{\partial y} = -q. \qquad (*)$$

Выражения, стоящие в скобках, согласно соотношениям (б) и (в), равны нулю. Подставляя затем в (*) выражения поперечных сил, находим

$$D\nabla^2\nabla^2 w = q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} . \qquad (ж)$$

Если ввести функцию Эри $\varphi(x, y)$ в форме

$$N_x = h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad N_y = h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad S = -h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \qquad (2)$$

то уравнения (ж) и (а) примут вид

$$\left.\begin{aligned} &D\nabla^2\nabla^2 w - hL(w, \varphi) = q; \\ &(\nabla^2\nabla^2\varphi)/E + 0{,}5L(w, w) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Здесь введен оператор

$$L(w, \varphi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} . \qquad (4)$$

При этом оператор $L(w, w)$ получается из оператора $L(w, \varphi)$заменой функции φ на функцию w.

Система нелинейных уравнений (3), связывающая функцию напряжений в срединной плоскости пластинки и функцию прогибов, выведена немецким ученым Т. Карманом. Совместно с граничными условиями она представляет основную систему нелинейных дифференциальных уравнений теории гибких пластинок. Решение этой системы в общем виде не получено. В настоящее время с помощью теории гибких пластинок получен ряд частных решений для равномерно распределенной поперечной нагрузки, а также для пластинок, теряющих устойчивость при сжатии и сдвиге в их срединной плоскости.

В случае жесткой пластинки, когда прогибы малы по сравнению с ее толщиной, необходимо принять функцию $\varphi = 0$. Тогда система (3) сводится к уравнению (2.5).