

184

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

*Методические указания
к выполнению расчетной работы и решению контрольных задач
по курсу «Сопротивление материалов»
для студентов дневной и заочной форм обучения*

Воронеж 2008

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет

Кафедра строительной механики

**РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ
СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ**

Методические указания
к выполнению расчетной работы и решению контрольных задач
по курсу «Сопротивление материалов»
для студентов дневной и заочной форм обучения

Воронеж 2008

Составители В.С. Сафронов, А.Н. Синозерский, Е.И. Осипова

УДК 624

ББК 30.121

Расчет статически неопределимой стержневой системы: [Текст]: метод. указания к выполнению расчетной работы и решению контрольных задач по курсу «Сопротивление материалов» / Воронеж. гос. арх.-строи. ун-т; сост.: В.С. Сафронов, А.Н. Синозерский, Е.И. Осипова. – Воронеж, 2008. – 17 с.

Приводятся указания к расчету простейших статически неопределимых систем со стержнями из хрупкого и пластичного материалов. Рассмотрены элементы рационального проектирования. Даны примеры, включающие определение усилий и назначение площадей поперечных сечений стержней, а также применение предварительных монтажных воздействий для создания оптимальной, по расходу материала, конструкции. Изложено решение перечисленных задач с помощью ПЭВМ.

Предназначены для студентов дневной и заочной форм обучения.

Ил. 4. Табл. 2. Библиогр.: 3 назв.

УДК 624

ББК 30.121

Печатается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного архитектурно-строительного университета

Рецензент – В.Д. Коробкин, д.ф.-м. н., проф., зав. кафедрой теоретической механики Воронежского государственного архитектурно-строительного университета

ВВЕДЕНИЕ

В курсе "Сопротивления материалов" студенты дневной формы обучения специальности "Промышленное и гражданское строительство" выполняют расчетную работу, а заочной – контрольные задачи по теме "Статически неопределимые стержневые системы".

Система называется статически неопределимой, если для вычисления усилий в ее элементах недостаточно уравнений равновесия. К ним следует добавить дополнительные – например, уравнения совместности деформаций. Последние с помощью закона Гука можно выразить через усилия и решить вместе с уравнениями равновесия.

Статически неопределимые конструкции имеют ряд особенностей: соотношения между напряжениями в отдельных стержнях зависят от геометрической схемы системы, и поэтому часть стержней может оказаться недогруженной;

изменение температуры и неточность изготовления отдельных элементов вызывают дополнительные усилия;

для решения задачи приходится задаваться соотношениями площадей поперечных сечений и модулей упругости материала стержней.

При выполнении расчетной работы используются два способа расчета прочности по предельным состояниям [1, 2, 3]:

- наиболее напряженного элемента (в системах из хрупкого материала);
- всей системы (в конструкциях со стержнями из материалов с пластическими свойствами).

Приводятся исследования по выравниванию напряжений в результате создания предварительных монтажных воздействий.

1. ЗАДАНИЕ

Студенту выдается индивидуальная схема стержневой системы (рис. 1).

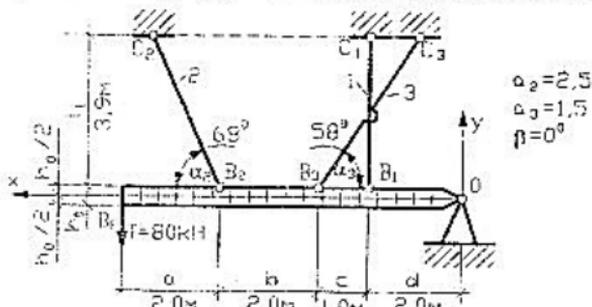


Рис. 1. М: 1:100

Она состоит из абсолютно жесткой конструкции, опирающейся на одном из концов на шарнирно-неподвижную опору θ и поддерживаемую тремя стержнями. Места прикреплений стержней это нижние B_i и расположенные на одном уровне – верхние C_i ($i = 1, 2, 3$) шарниры.

Во всех вариантах: высота подвешенной конструкции $h_0 = 0,2$ м, а стержень **1-вертикальный**, материал, из которого изготовлены стержни системы, имеет модуль упругости $E=210$ ГПа и расчетное сопротивление $R=225$ МПа.

Преподавателем назначаются:

размеры **a, b, c, d** и длина первого стержня l_1 ;

углы наклона β и α_2, α_3 к горизонту соответственно жесткой конструкции и стержней **2,3**;

модуль силы F ;

соотношения между площадями A_i поперечных сечений стержней системы - $a_2 = A_2/A_1$ и $a_3 = A_3/A_1$.

До выполнения расчетов студенту необходимо:

- вычислить длину стержней l_2, l_3 и их горизонтальные проекции l_{2x}, l_{3x} ;

- изобразить заданную систему с указанием цены деления масштаба, размеров **a, b, c, d**, углов $\beta, \alpha_2, \alpha_3$ и узлов B_i, C_i ($i = 1, 2, 3$).

Для последующих расчетов **рекомендуется** задать оси координат x/y с началом в центре тяжести шарнирно-неподвижной опоры θ , вертикальную ось y и горизонтальную x .

Так для случая, представленного на рис. 1 и в дальнейшем рассматриваемого в качестве **расчетного примера**, с $a = b = d = 2,0$ м, $c = 1,0$ м, $l_1 = 3,9$ м, $\beta = 0$, $\alpha_2 = 68^\circ$, $\alpha_3 = 58^\circ$, $F = 80$ кН, $a_2 = 2,5$, $a_3 = 1,5$ имеем

$$l_2 = l_1 / \sin 68^\circ = 3,9 / 0,927 = 4,207 \text{ м}, \quad l_3 = l_1 / \sin 58^\circ = 3,9 / 0,848 = 4,599 \text{ м};$$

$$l_{2x} = \sqrt{l_2^2 - l_1^2} = \sqrt{4,207^2 - 3,9^2} = 1,578 \text{ м}, \quad l_{3x} = \sqrt{l_3^2 - l_1^2} = \sqrt{4,599^2 - 3,9^2} = 2,437 \text{ м}.$$

Замечание: если опора θ расположена на левом конце, то ось x следует направить вправо.

Требуется:

1) подобрать площади поперечных сечений стержней, полагая, что их материал хрупкий;

2) то же, но считая материал стержней пластичным (результаты расчетов п.п. 1 и 2 сравнить);

3) выполнить проверку п.п. 1 и 2 на ПЭВМ (для заочной формы обучения по желанию студента);

4) по данным протокола расчета установить наиболее n , наименее l и средние σ напряженные стержни;

5) выполнить проектирование несущих стержней системы, рациональной по затратам материала на изготовление, используя усилия предварительного напряжения за счет специального изменения длины стержней и полагая при этом, что стержни u, I изготовлены с отклонениями δ_u, δ_I от длин расчетной схемы, а суммарные напряжения σ_i от нагрузки σ_n и монтажа σ_m равны расчетному сопротивлению R ; назначить площади поперечных сечений стержней A_i и величину δ_u, δ_I ;

6) на ПЭВМ по программе STAREXE произвести расчет системы на совместные воздействия нагрузки F и монтажных усилий от найденных в п.5 отклонений δ_u, δ_I .

Примечание: пункты 4, 5 и 6 выполняют только студенты специальности ИГС дневной формы обучения и для систем из хрупкого материала.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ПРИМЕР АНАЛИТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА

2.1. Подбор поперечных сечений стержней из хрупкого материала

Уравнения равновесия. Мысленно выделяем часть системы, чтобы оказались разрезанными все стержни и шарнир O (рис. 2). Действие отбро-

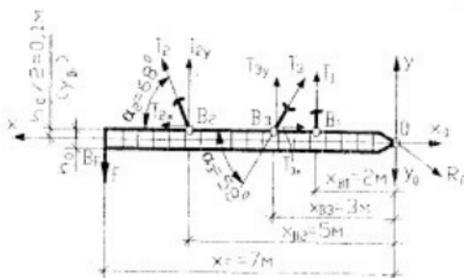


Рис. 2. М 1:100

шенной части заменяем внутренними (растягивающими) усилиями T_i и опорной реакции R_0 с составляющими по координатным осям T_{ix}, T_{iy} ($i=1,2,3$) и X_0, Y_0 . Записываем уравнения равновесия для рассматриваемого тела под действием заданной нагрузки F и составляющих T_{ix}, T_{iy}, X_0, Y_0 .

Заметим, что для произвольной плоской системы сил, принадлежащих одной выделенной части, число независимых уравнений равно трем. Но так как при решении поставленной задачи опорные реакции не привлекаются, то следует составить такое уравнение, в которое они не войдут. Например, для

системы на рис. 2 следует записать сумму моментов относительно центра шарнира O:

$$\sum m_o = 0 \dots -F \cdot B_f O + T_1 \cdot B_1 O + T_{2y} \cdot B_2 O - T_{2x} \cdot (h_0/2) + T_{3y} \cdot B_3 O + T_{3x} \cdot (h_0/2) = 0.$$

Имея в виду, что

$$B_f O = x_f = 7.0 \text{ м}, B_1 O = x_{B1} = 2.0 \text{ м}, B_2 O = x_{B2} = 5.0 \text{ м}, B_3 O = x_{B3} = 3.0 \text{ м};$$

$$h_0/2 = y_{B1} = y_{B2} = y_{B3} = 0.1 \text{ м};$$

$$T_{2y} = T_2 \cdot \sin \alpha_2 = T_2 \cdot 0.927, T_{2x} = T_2 \cdot \cos \alpha_2 = T_2 \cdot 0.375;$$

$$T_{3y} = T_3 \cdot \sin \alpha_3 = T_3 \cdot 0.848, T_{3x} = T_3 \cdot \cos \alpha_3 = T_3 \cdot 0.530,$$

получим

$$T_1 \cdot 2.0 + T_2 \cdot (5.0 \cdot 0.927 - 0.1 \cdot 0.375) + T_3 \cdot (3.0 \cdot 0.848 + 0.1 \cdot 0.530) = F \cdot 7.0$$

или

$$T_1 \cdot 2.0 + T_2 \cdot 4.609 + T_3 \cdot 2.597 = F \cdot 7.0. \quad (1)$$

В одно уравнение равновесия (1) входят три неизвестных усилия T_1 , T_2 , T_3 . Следовательно, система два раза статически неопределима.

Уравнения совместности деформаций. Для раскрытия статической неопределимости составим условия совместности перемещений [1, 2].

Изобразим систему в деформированном состоянии (рис. 3), заменяя

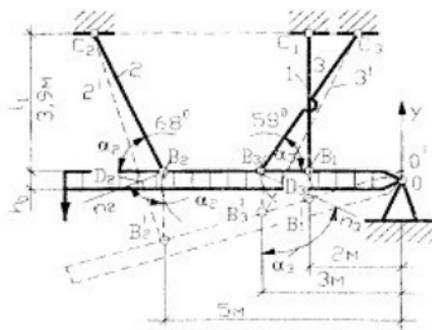


Рис. 3. М 1:100

перемещения узлов B_1 , B_2 , B_3 по дугам окружностей касательными $B_1 B_1'$, $B_2 B_2'$, $B_3 B_3'$. К новым положениям $2'$ и $3'$ стержней 2 и 3 проводим из центров шарниров B_2 и B_3 нормали n_2 и n_3 .

Тогда

$$\text{углы } \angle D_2 B_2 B_2' \approx \alpha_2 \text{ и } \angle D_3 B_3 B_3' \approx \alpha_3;$$

$$\text{гипотенузы } B_2 B_2' = B_2' D_2 / \sin \alpha_2 = \Delta l_2 / 0.927 \text{ и } B_3 B_3' = B_3' D_3 / \sin \alpha_3 = \Delta l_3 / 0.848;$$

из подобия треугольников $O'V_1B_1'$, $O'V_2B_2'$ и $O'V_3B_3'$:

$$\frac{B_1B_1'}{B_1O'} = \frac{B_2B_2'}{B_2O'} = \frac{B_3B_3'}{B_3O'} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta l_1}{2.0} = \frac{\Delta l_2}{5 \cdot 0.927} = \frac{\Delta l_3}{3 \cdot 0.848}.$$

Откуда получаем уравнения совместности деформаций в деформациях:

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \cdot 5 \cdot 0.927 / 2 \quad \text{и} \quad \Delta l_3 = \Delta l_1 \cdot 3 \cdot 0.848 / 2.$$

Привлекая закон Гука $\Delta l_i = T_i \cdot l_i / E \cdot A_i$, будем иметь следующие уравнения совместности деформаций в усилиях

$$\frac{T_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = \frac{T_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} \cdot \frac{5 \cdot 0.927}{2}$$

$$\text{и} \quad \frac{T_3 \cdot l_3}{E \cdot A_3} = \frac{T_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} \cdot \frac{3 \cdot 0.848}{2}$$

или при $l_1 = 3.9 \text{ м}$, $l_2 = 4.207 \text{ м}$, $l_3 = 4.599 \text{ м}$, $A_2 = a_2 \cdot A_1 = 2.5 \cdot A_1$, $A_3 = a_3 \cdot A_1 = 1.5 \cdot A_1$:

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{l_1 \cdot E \cdot 2.5 \cdot A_1}{l_2 \cdot E \cdot A_1} \cdot \frac{5 \cdot 0.927}{2} = T_1 \cdot \frac{3.9 \cdot 2.5 \cdot 5 \cdot 0.927}{4.207 \cdot 2} = 5.371 T_1 \quad (2)$$

$$\text{и} \quad T_3 = T_1 \cdot \frac{l_1 \cdot E \cdot 1.5 \cdot A_1}{l_3 \cdot E \cdot A_1} \cdot \frac{3 \cdot 0.848}{2} = T_1 \cdot \frac{3.9 \cdot 1.5 \cdot 3 \cdot 0.848}{4.599 \cdot 2} = 1.618 T_1. \quad (3)$$

Усилия, площади поперечных сечений и напряжения стержней.

Решая совместно (1), (2) и (3), находим усилия

$$T_1 = 80 \cdot 7.0 / (2.0 + 5.371 \cdot 4.600 + 1.618 \cdot 2.597) = 18.12 \text{ кН},$$

$$T_2 = 5.371 \cdot 18.12 = 97.32 \text{ кН} \quad \text{и} \quad T_3 = 1.618 \cdot 18.12 = 29.32 \text{ кН}.$$

Полезно проверить вычисленные T_1 , T_2 , T_3 подстановкой их в уравнение равновесия (1):

$$18.12 \cdot 2.0 + 97.32 \cdot 4.600 + 29.32 \cdot 2.597 = 80 \cdot 7.0$$

или $560.06 \approx 560.00$.

Расхождение $|560.06 - 560.00| \cdot 100\% / 560.00 = 0.011\%$ не превосходит допустимого 1.00%.

Так как напряжения $\sigma_1 = \sigma_1 = T_1 / A_1 = 18.12 / A_1$,

$$\sigma_2 = \sigma_2 = T_2 / A_2 = T_2 / a_2 \cdot A_1 = 97.32 / 2.5 \cdot A_1 = 38.93 / A_1,$$

$$\sigma_3 = \sigma_3 = T_3 / A_3 = T_3 / a_3 \cdot A_1 = 29.32 / 1.5 \cdot A_1 = 19.55 / A_1,$$

то наиболее напряженным является второй стержень, первый стержень – наименее напряженный.

Площадь наиболее напряженного стержня назначаем из условия прочности:

$$A_2 \geq T_2 / R = 97.32 \cdot 10^{-3} / 225 = 4.33 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 4.33 \text{ см}^2,$$

а остальных из заданных соотношений a_2, a_3 :

$$A_1 = A_2 / a_2 = 4.33 / 2.5 = 1.73 \text{ см}^2,$$

$$A_3 = a_3 \cdot A_1 = 1.5 \cdot 1.73 = 2.60 \text{ см}^2.$$

При этом выполняются условия прочности:

$$\sigma_1 = T_1/A_1 = 18.12 \cdot 10^{-3} / 1.73 \cdot 10^{-4} = 104.74 \text{ МПа} < R = 225 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = T_2/A_2 = 97.32 \cdot 10^{-3} / 4.33 \cdot 10^{-4} = 224.76 \text{ МПа} \approx R,$$

$$\sigma_3 = T_3/A_3 = 29.32 \cdot 10^{-3} / 2.60 \cdot 10^{-4} = 112.77 \text{ МПа} < R.$$

Значит, обеспечена прочность и всей системы.

В заключение вычисляем объем запроектированных элементов конструкции из хрупкого материала:

$$V_{\text{ст}} = A_1 \cdot l_1 + A_2 \cdot l_2 + A_3 \cdot l_3 = 1.73 \cdot 390 + 4.33 \cdot 420.7 + 2.60 \cdot 459.9 = 3692.07 \text{ см}^3.$$

2.2. Расчет системы со стержнями из пластичного материала

Уравнение равновесия (1) составляется для предельного состояния, когда напряжения во всех поддерживающих конструкцию стержнях полагаются равными пределу текучести $\sigma_i = R_n = R \cdot \gamma$, а усилия $T_{ip} = R \cdot \gamma \cdot A_{ip}$ ($i = 1, 2, 3$). При этом сила F увеличивается в γ раз. Тогда для рассматриваемого случая равенство (1) примет вид

$$T_{1p} \cdot 2.0 + T_{2p} \cdot 4.600 + T_{3p} \cdot 2.597 = F \cdot \gamma \cdot 7.0$$

или $R \cdot \gamma \cdot A_{1p} \cdot 2.0 + R \cdot \gamma \cdot A_{2p} \cdot 4.600 + R \cdot \gamma \cdot A_{3p} \cdot 2.597 = F \cdot \gamma \cdot 7.0.$

Присоединяя к последнему уравнению соотношения площадей $a_2 = A_{2p}/A_{1p} = 2.5$, $a_3 = A_{3p}/A_{1p} = 1.5$, после преобразований будем иметь

$$A_{1p} \cdot R \cdot (2.0 + 2.5 \cdot 4.600 + 1.5 \cdot 2.597) = F \cdot 7.0. \quad (4)$$

Откуда получим

$$A_{1p} = F \cdot 7.0 / R \cdot 17.40 = 80 \cdot 10^{-3} \cdot 7.0 / 225 \cdot 17.40 = 1.43 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1.43 \text{ см}^2.$$

Остальные площади поперечных сечений вычисляем, привлекая заданные зависимости между ними a_2 и a_3 :

$$A_{2p} = a_2 \cdot A_{1p} = 2.5 \cdot 1.43 = 3.58 \text{ см}^2$$

и

$$A_{3p} = a_3 \cdot A_{1p} = 1.5 \cdot 1.43 = 2.15 \text{ см}^2.$$

Далее определяем объем стержневой системы:

$$V_{\text{ст}} = A_{1p} \cdot l_1 + A_{2p} \cdot l_2 + A_{3p} \cdot l_3 = 1.43 \cdot 390 + 3.58 \cdot 420.7 + 2.15 \cdot 459.9 = 3052.59 \text{ см}^3,$$

и относительную разницу между объемами $V_{\text{ст}}$ и $V_{\text{ст}0}$ (см. п. 2.1):

$$\delta_V = (V_{\text{ст}0} - V_{\text{ст}}) \cdot 100\% / V_{\text{ст}0} = (3692.07 - 3052.59) \cdot 100\% / 3692.07 = 17.3 \%.$$

Таким образом, конструкция из пластичного материала более экономична. В приведенном примере экономия материала составляет 17.3 %.

2.3. Поверочный расчет на действие нагрузки

В соответствии с заданной расчетной схемой и принятой системой координат xOy вычисляют расстояния от опоры O до нижних B и верхних C_i по горизонтали и вертикали.

Так, для системы, изображенной на рис. 1, будем иметь

$$x_{B1} = d = 2.0 \text{ м}, \quad x_{B2} = b + c + d = 2.0 + 1.0 + 2.0 = 5.0 \text{ м}, \quad x_{C3} = c + d = 1.0 + 2.0 = 3.0 \text{ м}$$

$$y_{B1} = y_{B2} = y_{B3} = h_0 / 2 = 0.2 / 2 = 0.1 \text{ м};$$

$$x_{c1} = d = 2.0 \text{ м}, \quad x_{c2} = l_{2c} + b + c + d = 1.578 + 2.0 + 1.0 + 2.0 = 6.578 \text{ м},$$

$$x_{c3} = c + d - l_{3c} = 1.0 + 2.0 - 2.437 = 0.563 \text{ м} \quad \text{и} \quad y_{c1} = y_{c2} = y_{c3} = l_1 + (h_0 / 2) = 3.9 + 0.1 = 4.0 \text{ м}.$$

Расчет выполняется в диалоговом режиме по программе STAR.EXE. Ниже приводятся исходные данные, принятые по условиям рассматриваемого примера (в тексте подчеркнутые) и представленные в виде инструкции.

Координаты нижних точек крепления стержней 1,2,3, м

по оси: x: 2.00 5.00 3.00 ↵

по оси: y: 0.10 0.10 0.10 ↵

Координаты верхних точек крепления стержней 1,2,3, м

по оси: x: 2.00 6.58 0.56 ↵

по оси: y: 4.00 4.00 4.00 ↵

Есть ошибки ввода?

да - Y или нет - N

Координата x_F (x_F) места приложения силы F(P), м

7.00 ↵

Величина силы F(P), кН

80.0 ↵

Угол наклона конструкции к горизонту, градус

0.000 ↵

Высота конструкции h_0 , м

0.20 ↵

Соотношения площадей a_2 (A_2/A_1) 2.50 ↵

a_3 (A_3/A_1) 1.50 ↵

Модуль упругости E, ГПа 210 ↵

Расчетное сопротивление материала R, МПа

225.00 ↵

Есть ошибки ввода?

да - Y или нет - N ↵

* Стержень N=0 завьщшение длины D=0 мкм ↵

Есть ли ошибки ввода? да - Y или нет - N

Стержень N=0 уменьшение длины D=0 мкм ↵

Есть ли ошибки ввода? да - Y или нет - N ↵

Протокол расчета на действие нагрузки см. табл. 1.

Протокол расчета на действие нагрузки

Таблица 1

Координаты нижних точек		
(2.00; 0.10)	(5.00; 0.10)	(3.00; 0.10)
Координаты верхних точек		
(2.00; 4.00)	(6.58; 4.00)	(0.56; 4.00)
Координата приложения силы P в м → 7.00 м		
Величина силы P → 80.0 кН		
Угол наклона конструкции к горизонту → 0.000 град		
Высота конструкции → 0.20 м		
Соотношения площадей A ₂ /A ₁ → 2.50		
A ₃ /A ₁ → 1.50		
Модуль упругости E → 210 ГПа		
Расчетное сопротивление материала → 225.00 МПа		
Система из хрупкого материала		
T ₁ =18.13 кН, T ₂ =97.35 кН, T ₃ =29.33 кН		
A ₁ =1.73 см ² , A ₂ =4.33 см ² , A ₃ =2.60 см ²		
V _{хр} =3689.16 см ³		
Рациональная система		
A ₁ =1.43 см ² , A ₂ =3.58 см ² , A ₃ =2.15 см ²		
V _{рц} =3050.91 см ³		
• Стержень N=0 завышение длины D=0 мкм		
напряжения от завышения длины перегруженного стержня		
0.00	0.00	0.00
Стержень N=0 уменьшение длины D=0 мкм		
напряжения от уменьшения длины недогруженного стержня		
0.00	0.00	0.00
суммарные напряжения		
126.645	272.070	136.621

Видим, что полученные на ПЭВМ результаты в пределах точности выполненных вычислений совпадают с соответствующими, представленными в п.п. 2.1, 2.2.

В стержнях системы из хрупкого материала с площадями A₁=1.73 см², A₂=4.33 см², A₃=2.60 см² от силы F=80.0 кН возникают усилия T₁=18.13 кН, T₂=97.35 кН, T₃=29.33 кН (см. табл. 1) и напряжения:

$$\sigma_1 = T_1 / A_1 = 18.13 \cdot 10^{-3} / 1.73 \cdot 10^{-4} = 104.80 \text{ МПа} < R = 225 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = T_2 / A_2 = 97.35 \cdot 10^{-3} / 4.33 \cdot 10^{-4} = 224.83 \text{ МПа} > R,$$

$$\sigma_3 = T_3 / A_3 = 29.33 \cdot 10^{-2} / 2.60 \cdot 10^{-4} = 112.81 \text{ МПа} < R$$

Заметим, что только в одном стержне ($i=2$) напряжения близки к расчетному сопротивлению R . Остальные, наименее ($i=1$) и средние ($s=3$) напряжения, недогружены. Система – иррациональна.

2.4. Проектирование рациональной системы

Для определения более экономичной по расходу материала системы спроектируем наиболее напряженный стержень ($i=1$) длиннее на δ_n , а наименее напряженный ($i=3$) – короче на δ_n , чем принятые в соответствии с геометрической схемой. После закрепления в верхних узлах C_i ($i=1,2,3$) стержни 1,2,3 объединены с жесткой конструкцией в узлах B_i . В результате этого возникнут монтажные усилия T_m и напряжения σ_m ($i=1,2,3$). После приложения нагрузки F усилия T_d и напряжения σ_d от нее суммируются соответственно T_m и σ_m :

$$T_m + T_d = T_i \quad (5)$$

$$\text{и } \sigma_m + \sigma_d = \sigma_i \quad (i=1,2,3). \quad (6)$$

При этом выполняется условие рациональности, заключающееся в полном использовании прочностных свойств материала всех стержней:

$$\sigma_i = R \quad (i=1,2,3). \quad (7)$$

Площади поперечных сечений, усилия и напряжения в стержнях

Изображают мысленно отделенную от опоры и поддерживающих стержней жесткую конструкцию, находящуюся в равновесии под действием силы F , трех усилий T_i в отброшенных связях и двух составляющих X_0, Y_0 опорной реакции. Составляют сумму моментов относительно точки O (центра опорного шарнира). В общем случае, обозначая плечи действующих усилий через h_i ($i=1,2,3$) и плечи внешней силы через h_f , получим

$$\sum m_0 = 0 \dots \sum_{i=1}^3 h_i \cdot T_i - h_f \cdot F = 0,$$

а так как на основании (7) $T_1 = A_1 \cdot R$, $T_2 = a_2 \cdot A_1 \cdot R$, $T_3 = a_3 \cdot A_1 \cdot R$, то $A_1 \cdot R \cdot \sum_{i=1}^3 h_i \cdot a_i = h_f \cdot F$, которое аналогично (4).

Тогда площадь поперечного сечения стержня 1 определится выражением

$$A_1 = h_f \cdot F / R \cdot \sum_{i=1}^3 h_i \cdot a_i,$$

где h_i и h_i - коэффициенты, зависящие от геометрической схемы системы;
 $a_i = A_i / A_1$ - заданные соотношения между площадями поперечных сечений
 стержней рациональной системой (те же, что и в п. 1)

Затем вычисляют:

площади стержней - второго $A_2 = a_2 \cdot A_1$, } (8)
 - третьего $A_3 = a_3 \cdot A_1$;

усилия - суммарные $T_i = R \cdot A_i$, (9)
 - от нагрузки T_{ij} (см. T_i системы из хрупкого материала
 п.2.1. и табл. 1),

- монтажные $T_{im} = T_i - T_{ij}$; (10)

напряжения - от нагрузки $\sigma_{ij} = T_{ij} / A_i$; (11)

- монтажные $\sigma_{im} = T_{im} / A_i$; (12)

- суммарные σ_i по формуле (6).

В случае расчетной схемы (см. рис. 1) для отделинной части по аналогии с рис. 2 будем иметь рис. 4 и

$$\sum m_0 = 0 \dots x_{B1} \cdot T_1 + (x_{B2} \cdot \sin \alpha_2 - 0.5 \cdot h_0 \cdot \cos \alpha_2) \cdot T_2 + (x_{B3} \cdot \sin \alpha_3 + 0.5 \cdot h_0 \cdot \cos \alpha_3) \cdot T_3 - x_f \cdot F = 0,$$

где $T_1 = 1 \cdot A_1 \cdot R$, $T_2 = a_2 \cdot A_2 \cdot R$ и $T_3 = a_3 \cdot A_3 \cdot R$; $\alpha_2 = 68^\circ$, $\alpha_3 = 58^\circ$.

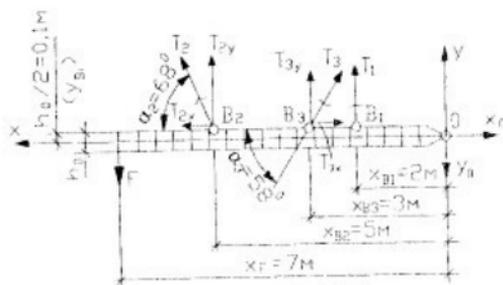


Рис. 4. М 1:100

Тогда

$$\sum m_0 = 0 \dots$$

$$A_1 R [x_{B1} + a_2 (x_{B2} \cdot \sin 68^\circ - 0.5 \cdot h_0 \cdot \cos 68^\circ) + a_3 (x_{B3} \cdot \sin 58^\circ + 0.5 \cdot h_0 \cdot \cos 58^\circ)] - x_f \cdot F = 0$$

и, следовательно,

$$A_I = \frac{x_T \cdot \bar{F}}{R \left[x_{m1} + a_1 (x_{m2} \sin 68^\circ - 0.5 h_0 \cos 68^\circ) + a_2 (x_{m3} \sin 58^\circ + 0.5 h_0 \cos 58^\circ) \right]} = \frac{225 \cdot 80 \cdot 10^{-3}}{225 [2.0 + 2.5 \cdot (5.0 \cdot 0.927 - 0.1 \cdot 0.375) + 1.5 \cdot (3.0 \cdot 0.848 + 0.1 \cdot 0.530)]} = 1.43 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = \mathbf{1.43 \text{ см}^2}.$$

Определяем

площади второго и третьей стержней по (8):

$$A_2 = 2.5 \cdot 1.43 = 3.58 \text{ см}^2 \text{ и } A_3 = 1.5 \cdot 1.43 = 2.15 \text{ см}^2;$$

суммарные усилия из (9) - $T_1 = 225 \cdot 10^3 \cdot 1.43 \cdot 10^{-4} = 32.175 \text{ кН}$;

$$T_2 = 225 \cdot 10^3 \cdot 3.58 \cdot 10^{-4} = 80.550 \text{ кН}, T_3 = 225 \cdot 10^3 \cdot 2.15 \cdot 10^{-4} = 48.375 \text{ кН};$$

усилия от нагрузки (см. \bar{F} - системы из хрупкого материала табл. 1.):

$$T_{1f} = T_1 = 18.13 \text{ кН}, T_{2f} = T_2 = 97.35 \text{ кН}, T_{3f} = T_3 = 29.33 \text{ кН};$$

монтажные усилия с учетом (10):

$$T_{2m} = 32.175 - 18.13 = 14.045 \text{ кН}, T_{3m} = 80.550 - 97.35 = -16.800 \text{ кН},$$

$$T_{3m} = 48.375 - 29.33 = 19.045 \text{ кН};$$

напряжения:

от нагрузки по (11) - $\sigma_{1f} = 18.13 \cdot 10^3 / 1.43 \cdot 10^{-4} = 126.783 \text{ МПа}$,

$$\sigma_{2f} = 97.35 \cdot 10^3 / 3.58 = 271.927 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{3f} = 29.33 \cdot 10^3 / 2.15 = 136.419 \text{ МПа};$$

монтажные по (12) - $\sigma_{1m} = 14.045 \cdot 10^3 / 1.43 = 98.217 \text{ МПа}$,

$$\sigma_{2m} = -16.80 \cdot 10^3 / 3.58 = -46.927 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{3m} = 19.045 \cdot 10^3 / 2.15 = 88.581 \text{ МПа};$$

суммарные по (6) - $\sigma_1 = 98.217 + 126.783 = 225.000 \text{ МПа} = R = 225 \text{ МПа}$,

$$\sigma_2 = -46.927 + 271.927 = 225.000 \text{ МПа} = R,$$

$$\sigma_3 = 88.581 + 136.419 = 225.000 \text{ МПа} = R.$$

(таким образом, условие рациональности (7) выполняется).

Начальные несовершенства длин стержней

Запроектируем теперь величину отклонений δ_2 и δ_3 от длин стержней a и l расчетной схемы, при которых суммарные напряжения $\sigma_i = R$, см. (7).

От действия только силы F имеем следующие соотношения абсолютных деформаций:

$$M_{af} / M_{lf} = h_a, \quad (13)$$

$$\Delta M_f / M_f = h_l, \quad (14)$$

где M_{af}, M_{lf}, M_f - деформации наиболее, наименее и средние напряженных стержней, определяемые по формулам закона Гука:

$$\Delta M_f = T_{af} \cdot l_f / E \cdot A_f.$$

Так как параметры деформаций h_u (13) и h_l (14) сохраняются в случае монтажных воздействий, то

$$\begin{aligned} \Delta l_{um} &= h_u \cdot \Delta l_{um} \\ \text{и } \Delta l_{lm} &= h_l \cdot \Delta l_{lm} \\ \text{при } \Delta l_{um} &= \delta_u + (T_{um} \cdot l_u / E \cdot A_u), \\ \Delta l_{lm} &= \delta_l + (T_{lm} \cdot l_l / E \cdot A_l), \\ \Delta l_{um} &= T_{um} \cdot l_u / E \cdot A_u. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta_u &= h_u \cdot \frac{T_{um} \cdot l_u}{E \cdot A_u} - \frac{T_{um} \cdot l_u}{E \cdot A_u} \\ \text{и } \delta_l &= h_l \cdot \frac{T_{lm} \cdot l_l}{E \cdot A_l} - \frac{T_{lm} \cdot l_l}{E \cdot A_l} \end{aligned}$$

или после преобразований

$$\delta_u = \frac{l_u}{E} \cdot \left(\frac{\sigma_{um}}{\sigma_{of}} \cdot \sigma_{of} - \sigma_{um} \right), \quad (15)$$

$$\delta_l = \frac{l_l}{E} \cdot \left(\frac{\sigma_{lm}}{\sigma_{of}} \cdot \sigma_{of} - \sigma_{lm} \right), \quad (16)$$

где напряжения принимаются по результатам настоящего пункта.

Аналогичные результаты можно получить, рассмотрев относительные деформации ϵ_{of} и $[\epsilon_{um} + (\delta_l / l_l)]$, где

$$\begin{aligned} \epsilon_{of} &= \sigma_{of} / E, \quad \epsilon_{um} = \sigma_{um} / E; \\ \delta_l &= \delta_u, \delta_l, \delta_v = 0; \end{aligned}$$

l_i - длина i -го стержня.

В случае рис. 1 при $u=2$, $l=1$, $s=3$ по формулам (15) и (16) определяем величину отклонений от длин стержней расчетной схемы:

$$\delta_u = \frac{4.207}{210 \cdot 10^3} \left[\frac{88.501}{136.419} \cdot 271.927 - (-46.927) \right] = 4.477 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 4.477 \text{ мм}$$

$$\text{и } \delta_l = \frac{3.900}{210 \cdot 10^3} \left[\frac{88.501}{136.419} \cdot 126.783 - 98.217 \right] = -0.295 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -295 \text{ мкм}$$

Окончательно примем $\delta_u = 4480$ мкм и $\delta_l = -295$ мкм, то есть с округлением до третьей значащей цифры.

В заключение найдем относительную разницу объемов стержней системы из хрупкого материала V_{sp} (без предварительного напряжения) и рациональной V_r

$$\eta = \frac{V_{sp} - V_r}{V_{sp}} \cdot 100\%$$

или для рассматриваемого примера (см. табл. 1) с $V_{sp}=3689,16 \text{ см}^3$ и $V_p=3050,91 \text{ см}^3$ получим

$$\eta = \frac{3689,16 - 3050,91}{3689,16} \cdot 100\% = 17,3 \%$$

Итак, система с предварительными отклонениями $\delta_u = 4480 \text{ мкм}$ и $\delta_l = -295 \text{ мкм}$ от длины стержней 2 и 1 расчетной схемы рис. 1 экономичнее по расходу материала на 17,3 %, чем система без начальных несовершенств.

2.5. Расчет запроектированной рациональной системы на ПЭВМ

Исходные данные и инструкция по работе с программой STAR.EXE те же, что и в п. 2.3. Но, начиная с места, отмеченного звездочкой *, необходимо руководствоваться следующим:

Стержень №2 (u) завышение длины D=4480мкм (δ_u) ↓

Есть ли ошибка ввода? да -Y или нет - N

Стержень №1 (l) уменьшение длины D=-295мкм (δ_l) ↓

Есть ли ошибка ввода? да -Y или нет - N

Протокол расчета рациональной системы на нагрузку и монтажные воздействия см. табл. 2 (расчет только на силу F см. табл. 1 до места *).

ПРОТОКОЛ РАСЧЕТА НА НАГРУЗКУ И МОНТАЖНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

Таблица 2

* стержень №2 завышение длины D=4480 мкм		
напряжения от завышения длины перегруженного стержня		
83.20	-44.90	89.75
стержень №1 уменьшение длины D=-295 мкм		
напряжения от уменьшения длины нелогруженного стержня		
14.86	-2.21	-1.11
суммарные напряжения		
224.705	224.960	225.261

Расхождения суммарных напряжений от расчетного сопротивления $R=225 \text{ МПа}$ не превосходят 0,13 %. Следовательно, запроектированная таким образом система является рациональной.

Если абсолютная невязка $|\sigma_i|/R$ составит более 2 % (4,5 МПа), то необходимо уточнить δ_u, δ_l и вновь выполнить расчет на ПЭВМ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1976. – 608 с.
2. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов: учеб. пособие для техн. вузов / И.Н. Мироллобов, С.А. Енгальцев и др. – М.: Высш. шк., 1985. – 399 с.
3. Сборник расчетных работ по сопротивлению материалов на базе персональных ЭВМ : учеб. пособие / В.С. Сафронов, А.Н. Синозерский, М.В. Шитикова и др., под общ. ред. В.С. Сафронова; Воронеж. гос. арх.-строит. академия, - Воронеж, 1995. – 170 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Задание.....	3
2. Методические указания и пример аналитического расчета	
2.1. Подбор поперечных сечений стержней из хрупкого материала.....	5
2.2. Расчет системы со стержнями из пластичного материала.....	8
2.3. Поверочный расчет на действие нагрузки.....	8
2.4. Проектирование рациональной системы.....	11
2.5. Расчет запроектированной рациональной системы на ПЭВМ.....	15
Библиографический список.....	16

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Методические указания к выполнению расчетной работы и решению контрольных задач по курсу «Сопротивление материалов» для студентов дневной и заочной форм обучения

СОСТАВИТЕЛИ – профессор, доктор техн. наук
Владимир Сергеевич Сафронов,
профессор ВГАСУ, канд. техн. наук
Александр Николаевич Синозерский,
доцент ВГАСУ, канд. физ.-мат. наук
Елена Ивановна Осипова
Редактор Аграновская И.Н.

Подписано в печать 15.10.2008. Формат 60 × 84 1/16. Уч.-изд. л. 1,0
Усл.-печ. л. 0. Бумага для множительных аппаратов. Тираж 500 экз. Заказ № 557
Отпечатано: отдел оперативной полиграфии Воронежского государственного архитектурно-строительного университета
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84