

Пример расчёта тонкостенного стержня замкнутого профиля на свободное кручение
(А.В. Александров "Сопротивление материалов", пример 11.1)

Пример 11.1. В коробчатой балке пролётного строения моста определить касательные напряжения, вызванные кручением от расчетной нагрузки q , установленной с эксцентриситетом e относительно плоскости симметрии (рис. 11.7). Принять: $l=15$ м, $b=2,2$ м, $h=1,5$ м, $e=1,0$ м, $\delta_1=12$ мм, $\delta_2=20$ мм, $\delta_3=16$ мм, $q=100$ кН/м.

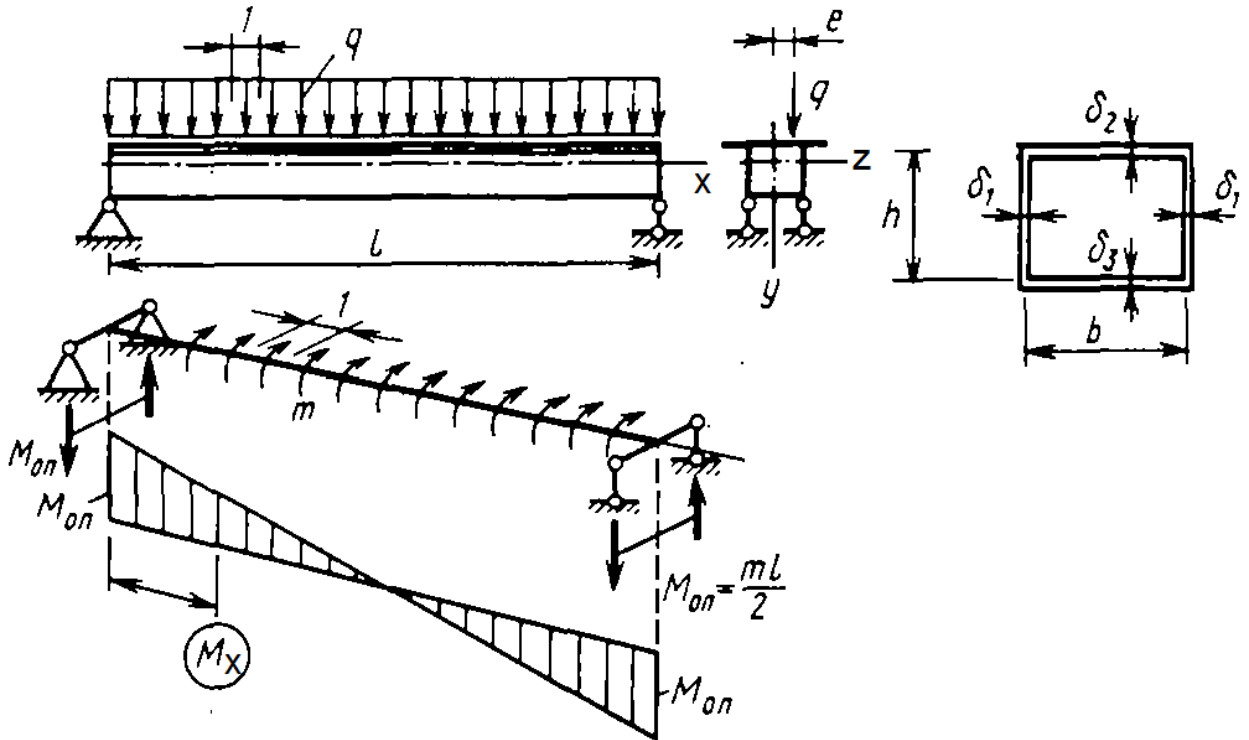


Рис. 1

Решение. Распределенная нагрузка создает распределенный скручивающий момент с интенсивностью $m=qe$. Опорные моменты $M_{оп}$ ввиду симметрии относительно среднего сечения будут одинаковыми и могут быть найдены из условия равновесия

$$\sum m_x = 0, \quad m\ell - 2M_{оп} = 0, \quad M_{оп} = \frac{m\ell}{2}.$$

На опорах будут также действовать вертикальные опорные реакции, равные в силу симметрии, $R_{оп} = \frac{q\ell}{2}$.

Выражение для крутящего момента найдем, рассматривая равновесие отсеченной части стержня.

$$\sum M_x = 0, \quad -M_{оп} + mx + M_x = 0, \quad M_x = M_{оп} - mx = \frac{m\ell}{2} - mx.$$

Эпюра M_x представлена на рис. 1.

В данной задаче крутящий момент изменяется по длине стержня, поэтому депланация не является постоянной (в среднем сечении в силу симметрии она будет равна нулю) и кручение, строго говоря, не будет свободным. Однако на основной части длины для стержней замкнутого

профиля приближённо можно принять кручение свободным, в особенности у опор, где действует максимальный крутящий момент и где отсутствует стеснение развитию деформаций. Поэтому для сечений вблизи опор воспользуемся формулой для касательных напряжений при свободном кручении

$$\tau_i = \frac{M_x^{\max}}{2\Omega\delta_i} = \frac{qel}{4hb\delta_i}.$$

Для каждой из сторон сечения получим

$$\tau_1 = \frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 15}{4 \cdot 1.5 \cdot 2.2 \cdot 12 \cdot 10^{-3}} = 9.5 \text{ МПа}, \quad \tau_2 = 5.7 \text{ МПа}, \quad \tau_3 = 7.1 \text{ МПа}.$$

Изобразим эпюру касательных напряжений

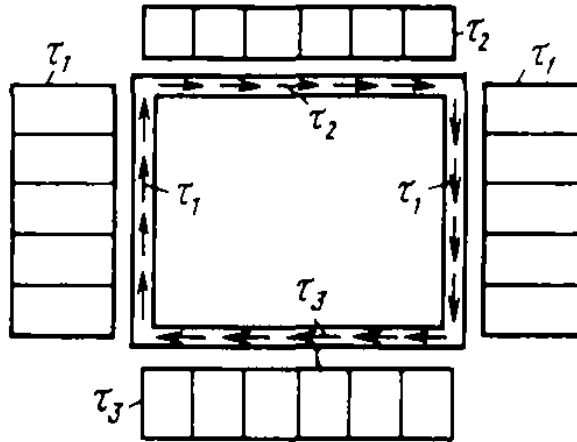


Рис. 2

Малое значение касательных напряжений по сравнению с расчётным нормальным напряжением (для стали $R=200$ МПа) говорит о том, что коробчатое сечение хорошо воспринимает крутящие усилия.

Найдём углы поворота сечений. Уравнение для углов закручивания имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GJ_k} = \frac{m\ell}{2GJ_k} - \frac{mx}{GJ_k}.$$

Интегрируя это уравнение от 0 до x с учётом, что $\varphi(0) = 0$ получим

$$\varphi = \int_0^x \left(\frac{m\ell}{2GJ_k} - \frac{mx}{GJ_k} \right) dx + \varphi(0) = \frac{m\ell x}{2GJ_k} - \frac{mx^2}{2GJ_k},$$

$$GJ_k = G \frac{4\Omega^2}{\int_s \delta(s)} = G \frac{4b^2 h^2}{2\frac{h}{\delta_1} + \frac{b}{\delta_2} + \frac{b}{\delta_3}}.$$

Эпюра $\varphi(x)$ изменяется по квадратной параболе с максимумом при $x = \ell/2$ (рис. 3). Полагая $x = \ell/2$, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, $m = qe$, получим

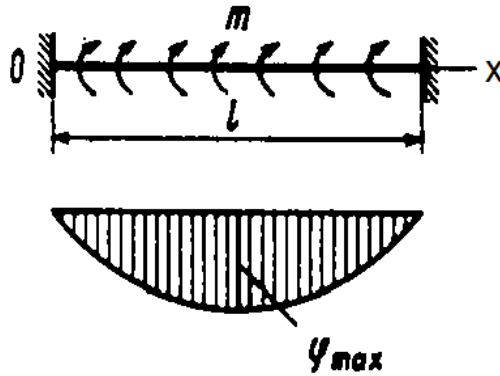


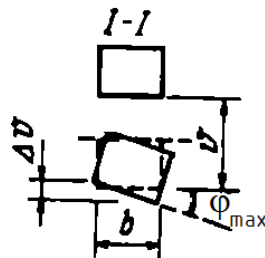
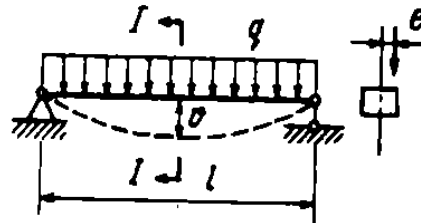
Рис. 3

$$GJ_k = 8 \cdot 10^7 \frac{4 \cdot 2.2^2 \cdot 1.5^2}{2 \cdot \frac{1.5}{12 \cdot 10^{-3}} + \frac{2.2}{20 \cdot 10^{-3}} + \frac{2.2}{20 \cdot 10^{-3}}} = 7 \cdot 10^6 \text{ КН} \cdot \text{м}^2,$$

$$\varphi_{\max} = \frac{m l l / 2}{2GJ_k} - \frac{m (\ell / 2)^2}{2GJ_k} = \frac{m l^2}{8GJ_k} = \frac{q \ell^2}{8GJ_k} = \frac{100 \cdot 1 \cdot 15^2}{8 \cdot 7 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

Интересно оценить

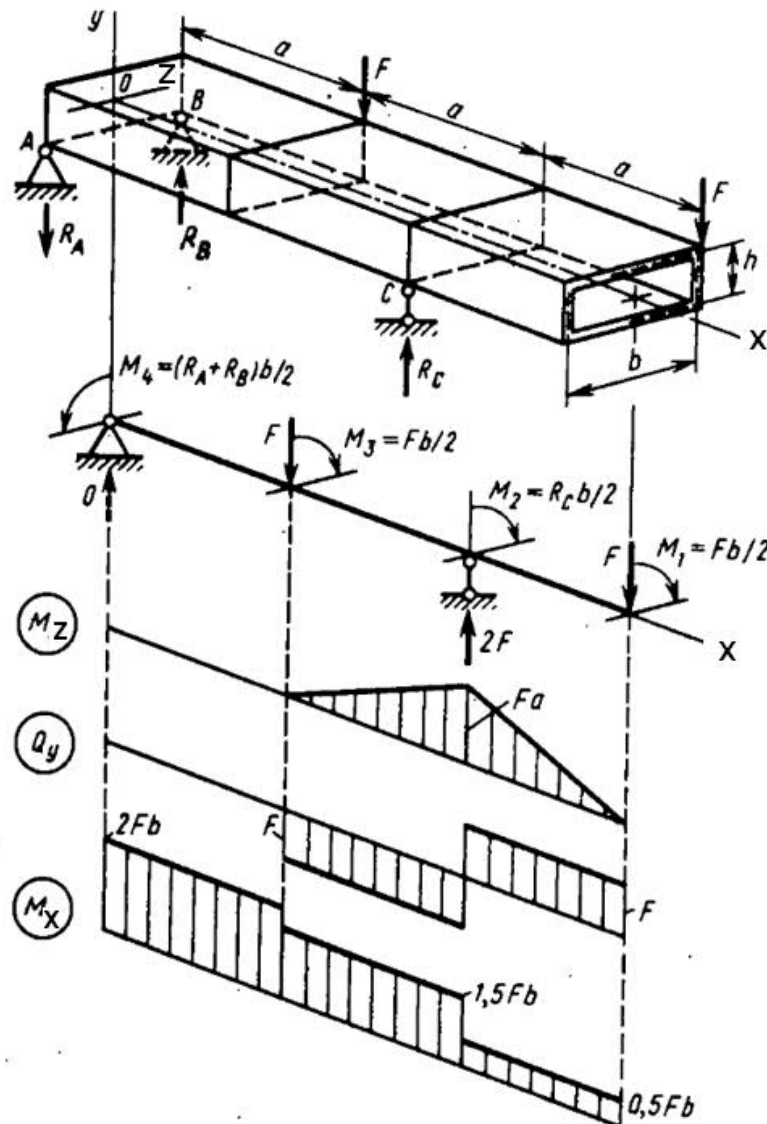
разность в прогибах Δv левой и правой стенок поперечного сечения балки, вызванную углом закручивания, равную $\Delta v = b \varphi_{\max} = 2,2 \cdot 0,4 \times 10^{-3} = 0,88 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,88 \text{ мм}$. Если принять по нормам допустимый прогиб, вызванный изгибом $v/l = 10^{-3}$, то прогиб будет $v = 15 \cdot 10^{-3} = 15 \text{ мм}$. Как видим, Δv значительно меньше v и прогибы от кручения мало изменяют картину прогибов от изгиба. Это говорит о большой жесткости замкнутого сечения на кручение.



Пример из §11.4

Рассмотрим технику определения внутренних усилий, геометрических характеристик сечения, напряжений и перемещений на примере коробчатого стержня с прямоугольным контуром (рис. 11.9). Одновременная работа на изгиб и кручение представляет собой пространственную работу стержня, и для большей наглядности целесообразно после определения опорных реакций перейти к «осевой» расчетной схеме в виде оси стержня с приложенными воздействиями в виде сил и моментов.

Моменты получаются от переноса сил в точки оси стержня в соответствующей плоскости поперечного сечения.



Опорные реакции. Из трех условий

$$\Sigma m_{AB} = 0 \rightarrow Fa + 3Fa - 2R_C a = 0;$$

$$\Sigma m_{AC} = 0 \rightarrow 2Fb - R_B b = 0;$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow 2F - R_A = 0$$

находим $R_C = 2F$; $R_B = 2F$; $R_A = 2F$.

Построим эпюры поперечных сил Q_y , изгибающих M_z и крутящих M_x моментов. Нормальные напряжения от изгиба найдем по формуле

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} y.$$

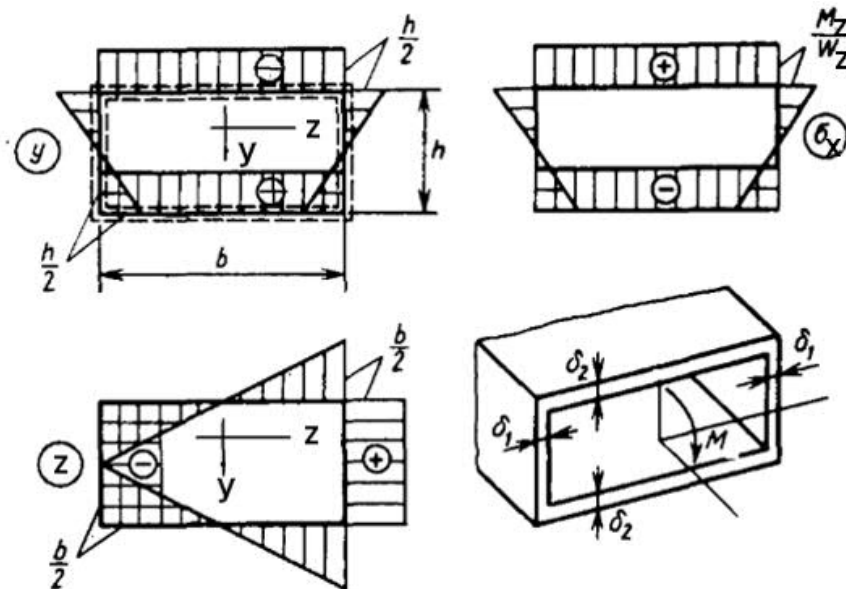
Момент инерции представим как интеграл по дуге контура сечения.

$$J_z = \int_A y^2 dA = \int_L y^2 \delta ds,$$

где L — длина всего контура.

Обычно на отдельных участках контура l_i толщина стенки постоянна $\delta_i = \text{const}$, поэтому выражение для J_z можно представить как сумму интегралов:

$$J_z = \sum \delta_i \int_{l_i} y(s) \cdot y(s) ds.$$



По правилу Верещагина перемножим эпюру $y(s)$ сама на себя

$$J_z = 4 \left[\delta_1 \left(\frac{h}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} + \delta_2 \left(\frac{h}{2} \right) \left(\frac{b}{2} \right) \frac{h}{2} \right] = \frac{h^3 \delta_1}{6} + \frac{h^2 b \delta_2}{2}.$$

Аналогично запишем формулы

$$J_y = \int_A z^2 dA = \sum_i \delta_i \int_{l_i} z z ds;$$

$$J_{yz} = \int_A z y dA = \sum_i \delta_i \int_{l_i} z y ds.$$

из которых получим

$$J_y = \frac{b^3 \delta_2}{6} + \frac{b^2 h \delta_1}{2}; \quad J_{yz} = 0.$$

Эпюра напряжений в сечении, где действует наибольший изгибающий момент

$M_z^{\max} = Fa$, показана на рисунке, где $W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}$. При одновременном действии изгиба в двух плоскостях и центрального растяжения нормальные напряжения находятся по формуле

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z.$$

Касательные напряжения возникают в балке от крутящего момента M_x и поперечной силы Q_y :

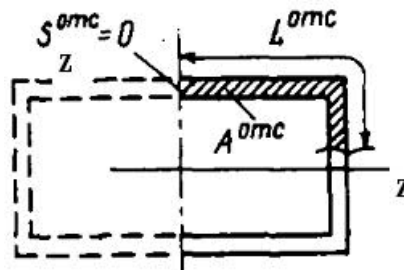
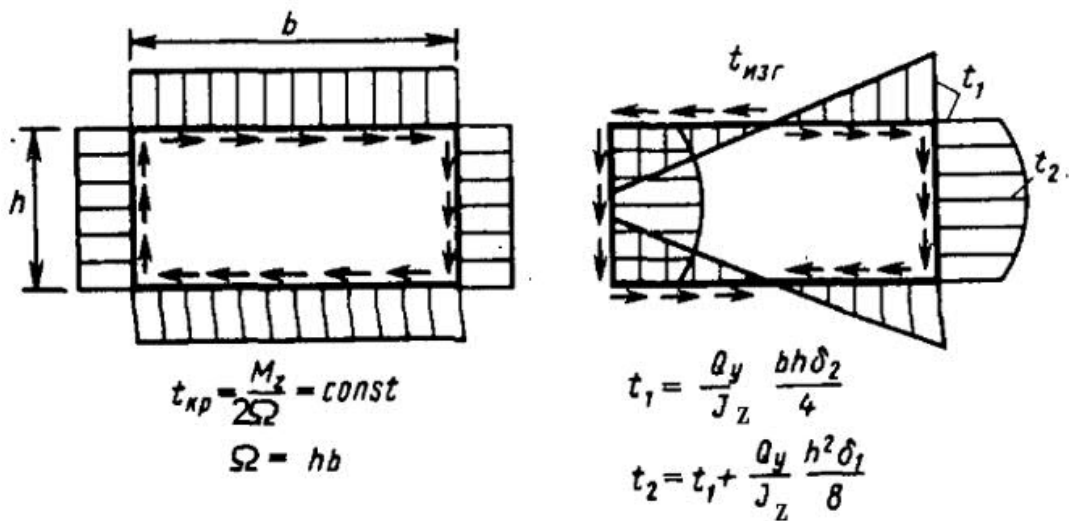
$$\tau_{кр} = \frac{M_x}{2\Omega\delta}, \quad \tau_{изг} = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{J_z \delta},$$

или если перейти к потокам $t_{кр} = \tau_{кр} \delta$ и $t_{изг} = \tau_{изг} \delta$, то

$$t_{кр} = \frac{M_x}{2\Omega}, \quad t_{изг} = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{J_z}.$$

Здесь

$$S_z^{\text{отс}} = \int_{A^{\text{отс}}} y dA = \sum_i \delta_i \int_L y(s) ds.$$



В каждой точке контура суммарный поток

$$t = t_{кр} + t_{изг},$$

а суммарное напряжение $\tau = t/\delta$.

При изгибе и кручении в сечении могут возникать большие по модулю как нормальные, так и касательные напряжения. Поэтому проверка на прочность производится, как при сложном напряженном состоянии

Перемещение Δ_{1p} , вызванное суммарной деформацией, найдем по формуле Мора перемножая соответствующие эпюры по правилу Верещагина:

$$\Delta_{1p} = \int_0^{3a} \frac{M_{zp} m_{z1}}{EJ_z} ds + \int_0^{3a} \frac{M_{xp} m_{x1}}{GJ_{кр}} ds = \frac{Fa^2}{2EJ_z} \cdot \frac{5}{6} a + \frac{Fa^2}{2EJ_z} \cdot \frac{2}{3} a +$$

$$+ \left(\frac{2Fba}{GJ_{кр}} + \frac{3Fba}{2GJ_{кр}} \right) \frac{5}{4} b + \frac{Fba}{2GJ_{кр}} \cdot \frac{b}{2} = \frac{3Fa^3}{4EJ_z} + \frac{37Fab^2}{8GJ_{кр}}$$

Жесткость при свободном кручении будет равна

$$GJ_{кр} = \frac{4\Omega^2 G}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}} = \frac{4h^2 b^2 G}{2 \left(\frac{h}{\delta_1} + \frac{b}{\delta_2} \right)} = \frac{2h^2 b^2 G}{\left(\frac{h}{\delta_1} + \frac{b}{\delta_2} \right)}$$

