Лекция №9

Несимметричный изгиб круглых пластин. Применение одинарных тригонометрических рядов.

В общем случае несимметричного изгиба все величины зависят от двух координат: r и Θ (рис. 1).

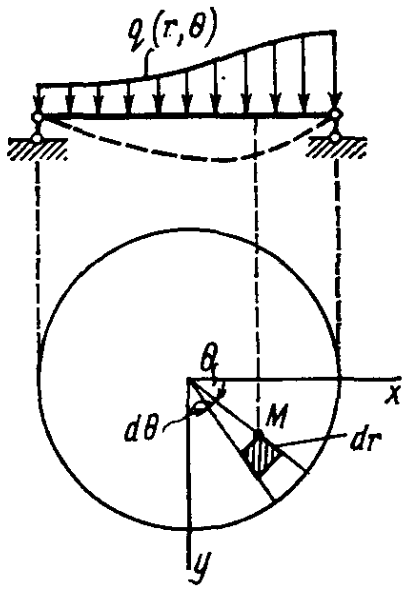

Рис. 1

Разрешающее уравнение изгиба пластины имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\Theta^2}\right)=\frac{q(r,\ \Theta)}{D}. \qquad (1)$$

Граничные условия на криволинейных кромках круглой пластины формулируются аналогично тому, как это рассмотрено для прямоугольной пластины. В частности, для свободной кромки при $r = R$ будем иметь два условия

$$M_r = 0\ |_{r=R}; \quad V_r = Q_r + \frac{\partial H}{r\,\partial\Theta} = 0\ |_{r=R},$$

где V_r — обобщенная поперечная сила.

В общем случае, когда нагрузка q есть произвольная функция r и Θ, т. е. $q = q\ (r,\ \Theta)$, для получения решения она разлагается в одинарный тригонометрический ряд по координате Θ:

$$q(r,\ \Theta) = q_0(r) + \sum_{m=1,\ 2,\ \ldots}^{\infty} q_m(r)\sin m\Theta + \sum_{n=1,\ 2,\ \ldots}^{\infty} q_n(r)\cos n\Theta. \qquad (2)$$

Аналогично тому, как это было для прямоугольной пластины, коэффициенты разложения (1) с учетом свойства ортогональности гармоник синуса и косинуса раличных номеров получим в виде

$$\left.\begin{aligned} q_m(r) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q(r,\ \Theta)\sin m\Theta\, d\Theta;\\ q_n(r) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q(r,\ \Theta)\cos n\Theta\, d\Theta;\\ q_0(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(r,\ \Theta)\, d\Theta. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Все они в общем случае являются функциями r, так как в (3) переменная Θ исчезает после интегрирования, а r остается. Величина $q_0\,(r)$ представляет собой среднюю нагрузку на окружность радиуса r. Отдельно взятой нагрузке $q_0\,(r)$ отвечает осесимметричный изгиб пластины.

Представим прогибы $w\,(r,\,\theta)$ в виде ряда

$$w\,(r,\,\Theta)=w_0\,(r)+\sum_{m=1,\,2,\,\dots}^{\infty} w_m\,(r)\sin m\Theta+\sum_{n=1,\,2,\,\dots}^{\infty} w_n\,(r)\cos n\Theta, \qquad (4)$$

где функции $w_0\,(r)$, $w_m\,(r)$ и $w_n\,(r)$ подлежат определению. Подставив (2) и (4) в основное дифференциальное уравнение (1) и приравняв коэффициенты при синусах и косинусах, придем к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $w_m\,(r)$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{m^2}{r^2}\right)\left(\frac{d^2w_m}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw_m}{dr}-\frac{m^2}{r^2}w_m\right)=\frac{q_m}{D}. \qquad (5)$$

Для функций w_n уравнение имеет тот же вид.

Полагая $m=0$, приходим к уравнению осесимметричного изгиба пластины нагрузкой $q_0\,(r)$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2w_0}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw_0}{dr}\right)=\frac{q_0\,(r)}{D},$$

Следовательно его решение таково

$$w_0=C_1+C_2r^2+C_3\ln r+C_4\,r^2\ln r+w_0\,(q_0). \qquad (6)$$

Для $m=1$ решение уравнения (5) имеет вид

$$w_1=C_1r+C_2r^3+\frac{1}{r}C_3+C_4r\ln r+w_1\,(q_1), \qquad (7)$$

а для $m=2,\ 3,\ \dots$.

$$w_m=C_1r^m+C_2r^{m+2}+C_3r^{-m}+C_4r^{-m+2}+w_m\,(q_m). \qquad (8)$$

Рассмотрим пример. Пусть на пластину, защемленную на контуре, действует нагрузка (рис. 2)

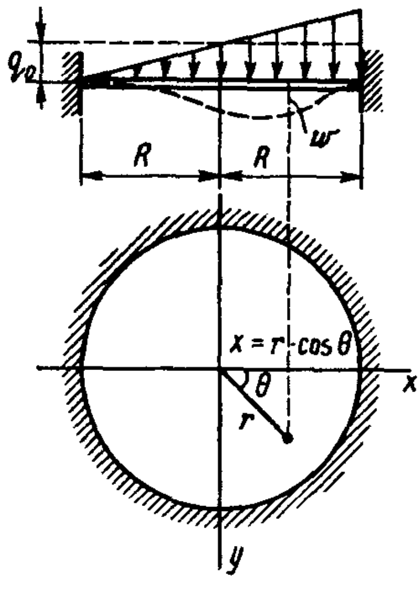

Рис. 2

$$q=q_0+\frac{x}{R}q_0=q_0+\frac{rq_0}{R}\cos\Theta. \qquad (a)$$

Сравнивая (а) с (2), видим, что в данном примере присутствуют лишь два члена ряда: осесимметричное слагаемое q_0 и слагаемое $q_n\,(r)\cos n\Theta$ при $n=1$ и $q_1\,(r)=rq_0\,/R$.

Решение $w_0\,(r)$ для q_0 (см. (12) в лекции №8)

$$W_0(r)=\frac{q_0}{64D}\left(R^2-r^2\right)^2$$

Найдем решение $w_1\,(r)$ для нагрузки $q_1\,(r)\cos n\Theta$, взяв его по (7). В этом решении C_3 и C_4 надо положить равными нулю из условия, что при $r\to 0$ прогибы $w\neq\infty$. Частное решение $w_1\,(q_1)$ примем в форме Ar^5. Подставив его в (5) при $m = 1$, найдем $A = q_0/(192\ RD)$. Итак, имеем

$$w_1(r) = C_1 r + C_2 r^3 + \frac{q_0}{192RD} r^5. \qquad (6)$$

Для определения C_1 и C_2 используем граничные условия $w_1 = 0 \mid_{r=R}$ и $w_1' = 0 \mid_{r=R}$, что дает $C_1 = q_0 R^4/(192D)$, $C_2 = -q_0 R^2/(96D)$.

Окончательно получим такое выражение для прогибов:

$$w(r, \Theta) = w_0(r) + w_1(r)\cos\Theta = \frac{q_0 R^4}{64D}\left[1 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right] + \frac{q_0 R^4}{192D}\left[\frac{r}{R} - 2\left(\frac{r}{R}\right)^3 + \left(\frac{r}{R}\right)^5\right]\cos\Theta.$$

Изгибающие и крутящие моменты выражаются через функцию W(r,θ) по формулам

$$\left.\begin{aligned} M_r &= -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right]; \\ M_\theta &= -D\left[\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

и

$$H = -D(1-\nu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right). \qquad (10)$$

Поперечные силы по формулам

$$\left.\begin{aligned} Q_r &= -D\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right); \\ Q_\theta &= -D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial^2 \theta}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Приведенные поперечные силы (опорные реакции) задаются выражениями

$$\left.\begin{aligned} Q_r^{\text{прив}} &= -D\left[\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 w + (1-\nu)\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\right]; \\ Q_\theta^{\text{прив}} &= -D\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\nabla^2 w + (1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$