

## ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПЛАСТИНОК

Точных решений важных для практики задач теории изгиба плит известно очень мало. Поэтому важное значение приобрели вариационные методы, позволяющие эффективно получать приближенные аналитические решения дифференциальных уравнений с точностью, достаточной для инженерных расчетов.

Сущность вариационных методов заключается в том, что функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению при заданных граничных условиях, заменяют приближенным аналитическим выражением, подбираемым так, чтобы оно наилучшим образом аппроксимировало эту функцию.

В теории изгиба пластинок такой подход позволяет свести интегрирование основного дифференциального уравнения в частных производных к решению системы линейных алгебраических уравнений или к решению обыкновенного дифференциального уравнения.

## МЕТОД РИТЦА-ТИМОШЕНКО

Метод основан на теореме Лагранжа, в соответствии с которой из всех возможных распределений перемещений упругого тела истинными являются такие, которые сообщают полной потенциальной энергии системы минимальное значение, т.е.:

$$U = A + V = \min. \quad (1)$$

Здесь  $A$  – работа упругой деформации тела. Для случая изгиба тонкой пластинки она имеет вид:

$$A = -\frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz. \quad (2)$$

Работа внешних сил  $V$ , действующих на пластинку, при отсутствии объемной нагрузки равна

$$V = \iint_S q W dx dy. \quad (3)$$

Примем функцию прогибов пластинки в виде ряда

$$W_n = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{k\ell} \varphi_{k\ell}, \quad (4)$$

где  $\varphi_{k\ell} = \varphi_{k\ell}(x, y)$  – некоторые заданные функции,  $a_{k\ell}$  – коэффициенты, подлежащие определению.

Выражая напряжения и деформации в (2) через функцию прогибов (4), после подстановки функций (2)-(3) в выражение (1) оно будет квадратичной функцией параметров  $a_{k\ell}$ .

Минимуму полной потенциальной энергии системы соответствует условие равенства нулю её производных по параметрам  $a_{k\ell}$ ;

$$\frac{\partial U}{\partial a_{k\ell}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Каждое из уравнений (5) является линейным относительно  $a_{k\ell}$ . Таким образом, получаем систему  $n^2$  линейных алгебраических уравнений для определения параметров  $a_{k\ell}$ .

Можно показать, что уравнения (5) выражают как условия равновесия, так и статические граничные условия. В связи с этим при задании функций  $\varphi_{k\ell}$ , входящих в выражение прогибов (4), обязательно удовлетворять лишь кинематические граничные условия.

Подставляя найденные из (5) параметры  $a_{k\ell}$  в (4), получим искомую функцию прогибов пластинки.

Полученное решение является приближенным. Сходимость ряда (4) к точному решению можно повысить, принимая функции  $\varphi_{k\ell}$  удовлетворяющими как статическим, так и кинематическим граничным условиям, а также увеличивая число членов ряда.

При изгибе пластинок любого очертания, защемленных по контуру, а для прямоугольных пластинок – еще и шарнирно опертых по контуру, для потенциальной энергии  $U$  можно получить следующее выражение

$$U = \frac{D}{2} \iint_s (\nabla^2 w)^2 dx dy.$$

#### МЕТОД БУБНОВА-ГАЛЕРКИНА

Метод основан на свойстве ортогональных функций. Ортогональными на отрезке  $a \leq x \leq b$  называются функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ , для которых выполняется условие

$$\int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = 0.$$

Например, семейство функций

$$1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(nx), \sin(nx), \dots$$

является ортогональной системой на промежутке  $[-\pi, +\pi]$ .

Если одна из функций, например  $\varphi_2(x)$ , тождественно равна нулю, то она будет ортогональна к любой функции  $\varphi_1(x)$ . Например, функция

$$\varphi(x) = EIy^{IV} - q,$$

являющаяся левой частью дифференциального уравнения оси изогнутой балки, тождественно равна нулю при всех значениях  $x$ , поэтому

$$\int_l (EIy^{IV} - q) \varphi_i(x) dx = 0.$$

Если функцию прогибов  $y(x)$  заменить приближенно рядом

$$y_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i,$$

то выражение  $Ely^{IV} - q$  уже не будет тождественно равно нулю, следовательно, не будет ортогонально любой функции. Тогда потребуем, чтобы оно было ортогонально, по крайней мере, к каждой из функций  $\varphi_i$ , составляющих ряд  $y_n$ , т.е. чтобы выполнялись условия

$$\int_i (Ely^{IV} - q) \varphi_i dx = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n$$

Таким образом, получим систему  $n$  линейных алгебраических уравнений для определения  $n$  коэффициентов  $a_i$ , входящих в ряд.

Приведенные рассуждения применимы и к функциям двух переменных.

Рассмотрим функцию прогибов в виде ряда (4).

Потребуем, чтобы левая часть дифференциального уравнения изогнутой срединной поверхности

$$D\nabla^4 W - q = 0 \quad (6)$$

была ортогональна каждой из функций  $\varphi_{k\ell}(x, y)$  ряда (4). Эти условия для прямоугольной области  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  приводят к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\iint_{00}^{ab} (D\nabla^4 w - q) \varphi_{k\ell} dx dy = 0, \quad (7) \\ k = 1, 2, \dots, n; \quad \ell = 1, 2, \dots, n.$$

Решение системы (7) дает значения коэффициентов  $a_{k\ell}$  и, тем самым, функцию прогибов.

Метод Бубнова-Галеркина позволяет более просто, чем в методе Ритца-Тимошенко получить значения коэффициентов ряда (4). Трудности здесь связаны с подбором функций  $\varphi_{k\ell}$ , так как они должны удовлетворять не только кинематическим, но и статическим граничным условиям.

Методу Бубнова-Галеркина можно дать энергетическую интерпретацию. Левая часть дифференциального уравнения (6) представляет собой проекцию на ось  $z$  внутренних и внешних сил, действующих на бесконечно малый элемент срединной поверхности пластинки. Функции  $\varphi_{k\ell}$ , входящие в ряд  $W$ , можно рассматривать как возможные перемещения срединной поверхности. Тогда условия (7) выражают принцип возможных перемещений – для системы с идеальными двусторонними связями сумма элементарных работ внешних и внутренних сил на любом возможном перемещении из положения равновесия равна нулю.

В этом смысле методы Ритца-Тимошенко и Бубнова-Галеркина равноценны и приводят к одинаковым результатам, если функции  $\varphi_{k\ell}$  выбраны удовлетворяющими всем граничным условиям.

## ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ БУБНОВА-ГАЛЕРКИНА

Для иллюстрации метода Бубнова—Галеркина рассмотрим изгиб защемленной по контуру прямоугольной пластинки, к которой приложена равномерно распределенная нагрузка. Направление координатных осей показано на рис.

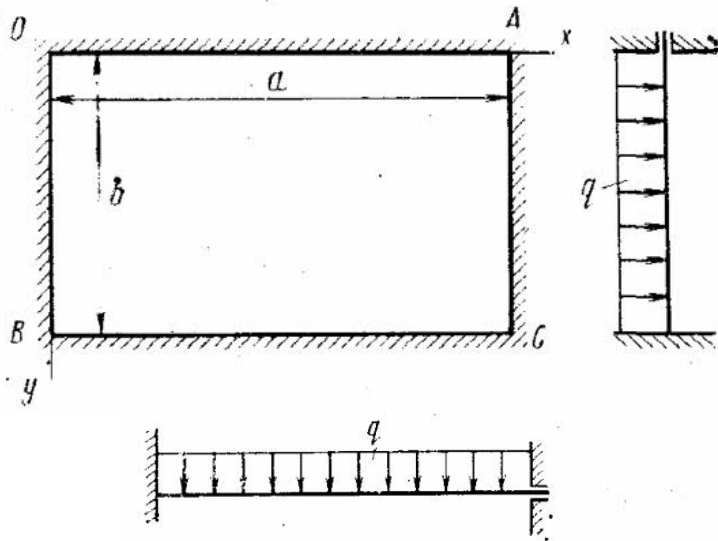


Рис.

Из характера закрепления пластинки вытекают следующие граничные условия. На гранях пластинки  $OB$  и  $AC$

$$\begin{aligned} &\text{при } x=0 \text{ и } x=a \\ &\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (a)$$

На гранях  $OA$  и  $BC$

$$\begin{aligned} &\text{при } y=0 \text{ и } y=b \\ &\omega = \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (б)$$

Чтобы удовлетворить этим условиям, приближенное выражение функции прогибов можно принять в виде ряда

$$\omega_n = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \left(1 - \cos \frac{2k\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2l\pi y}{b}\right), \quad (в)$$

где функция

$$\varphi_{kl} = \left(1 - \cos \frac{2k\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2l\pi y}{b}\right)$$

каждого его члена удовлетворяет всем граничным условиям. Так, на грани  $OB$

$$\cos \frac{2k\pi x}{a} \Big|_{x=0} = \cos 0 = 1$$

и, следовательно,  $\omega_n = 0$ . На грани  $AC$

$$\cos \frac{2k\pi x}{a} \Big|_{x=a} = \cos 2k\pi = 1$$

и тоже  $\omega_n = 0$ . Точно так же выполняются условия (б) для прогибов на гранях  $OA$  и  $BC$ .

Для проверки граничных условий в отношении углов поворота на контуре пластинки вычисляем производные от функции прогибов в) по  $x$  и  $y$ :

$$\frac{\partial w_n}{\partial x} = \frac{2\pi}{a} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} k \sin \frac{2k\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2l\pi y}{b}\right);$$

$$\frac{\partial w_n}{\partial y} = \frac{2\pi}{b} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} l \left(1 - \cos \frac{2k\pi x}{a}\right) \sin \frac{2l\pi y}{b}.$$

На грани  $OB$

$$\sin \frac{2k\pi x}{a} \Big|_{x=0} = \sin 0 = 0$$

и, следовательно, производная  $\frac{\partial w_n}{\partial x} = 0$ . Точно так же на грани  $AC$

$$\sin \frac{2k\pi x}{a} \Big|_{x=a} = \sin 2k\pi = 0$$

и производная  $\frac{\partial w_n}{\partial x} = 0$ . Аналогично, на гранях  $OA$  и  $BC$  обращается в нуль производная  $\frac{\partial w_n}{\partial y}$ . Таким образом, функция прогибов (в) удовлетворяет всем граничным условиям (а) и (б).

Для отыскания неопределенных параметров  $a_{kl}$  нужно составить систему уравнений Бубнова—Галеркина (7). В первом приближении ограничимся одним членом ряда (в):

$$w_1 = a_{11} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right). \quad (\text{г})$$

Тогда функция  $\varphi_{kl}$  для этого члена ряда будет

$$\varphi_{11} = \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right). \quad (\text{д})$$

Подставляя соотношения (г) и (д) в уравнения ( ), получаем

$$\int_0^a \int_0^b \left\{ -16\pi^4 a_{11} D \left[ \frac{1}{a^4} \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{a^2 b^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + \frac{1}{b^4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \cos \frac{2\pi y}{b} \right] - \right. \\ \left. - q \right\} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) dx dy = 0.$$

Интегрируя и упрощая, получим

$$16\pi^4 a_{11} D \left( \frac{3b}{4a^3} + \frac{1}{2ab} + \frac{3a}{4b^3} \right) - qab = 0.$$

Отсюда коэффициент

$$a_{11} = \frac{qa^4}{4\pi^4 D} \frac{1}{3 + 2a^2/b^2 + 3a^4/b^4}.$$

Внося полученное значение  $a_{11}$  в формулу (г), находим функцию прогибов в первом приближении:

$$\omega_1 = \frac{qa^4}{4\pi^4 D} \frac{\left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right)}{3 + 2a^2/b^2 + 3a^4/b^4}.$$

Максимальный прогиб возникает в центре пластинки (при  $x = a/2$  и  $y = b/2$ ). Для квадратной пластинки при  $a = b$  и коэффициенте Пуассона  $\nu = 0,3$  получаем следующее значение максимального прогиба:

$$\begin{aligned} \max \omega_1 &= qa^4 / (8\pi^4 D) = qa^4 / (8\pi^4 E h^3) 12 (1 - \nu^2) = \\ &= 0,0140 qa^4 / (E h^3). \end{aligned}$$

Точное значение максимального прогиба квадратной пластинки, заземленной по контуру и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки,

$$\max \omega = 0,0138 qa^4 / (E h^3).$$

Таким образом, максимальный прогиб, полученный в первом приближении, отличается от точного значения менее чем на 1,5%.

При вычислении изгибающих моментов и поперечных сил ряды сходятся значительно хуже.