Выражения напряжений через усилия

Сравнивая между собой формулы напряжений и погонных усилий можно выразить напряжения через усилия

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x = \frac{12M_x z}{h^3}; \quad \sigma_y = \frac{12M_y z}{h^3}; \quad \tau_{xy} = \frac{12Hz}{h^3}; \\ &\tau_{zx} = 6Q_x \frac{\left(h^2\!/4 - z^2\right)}{h^3}; \quad \tau_{zy} = 6Q_y \frac{\left(h^2\!/4 - z^2\right)}{h^3}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Если иметь в виду, что величина $h^3/12$ представляет собой момент инерции прямоугольного сечения единичной ширины, формулы для нормальных напряжений σ_x, σ_y совпадают с формулами сопротивления материалов для нормальных напряжений в поперечном сечении балки:

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{I}; \qquad \sigma_y = \frac{M_y z}{I}.$$

Аналогичное соответствие с формулами касательных напряжений в балке прямоугольного сечения имеет место для касательных напряжений τ_{zx} и τ_{zy}.

Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности плиты.

Полученные соотношения для деформаций, напряжений и усилий выражают их через функцию $w(x,y)$ прогибов срединной плоскости пластинки. В связи с этим решение задачи изгиба тонкой пластинки заключается в определении этой функции.

Рассмотрим равновесие элемента срединной поверхности (рис. 1), находящегося под действием перпендикулярной к ней нагрузки q и погонных усилий на границах элемента.

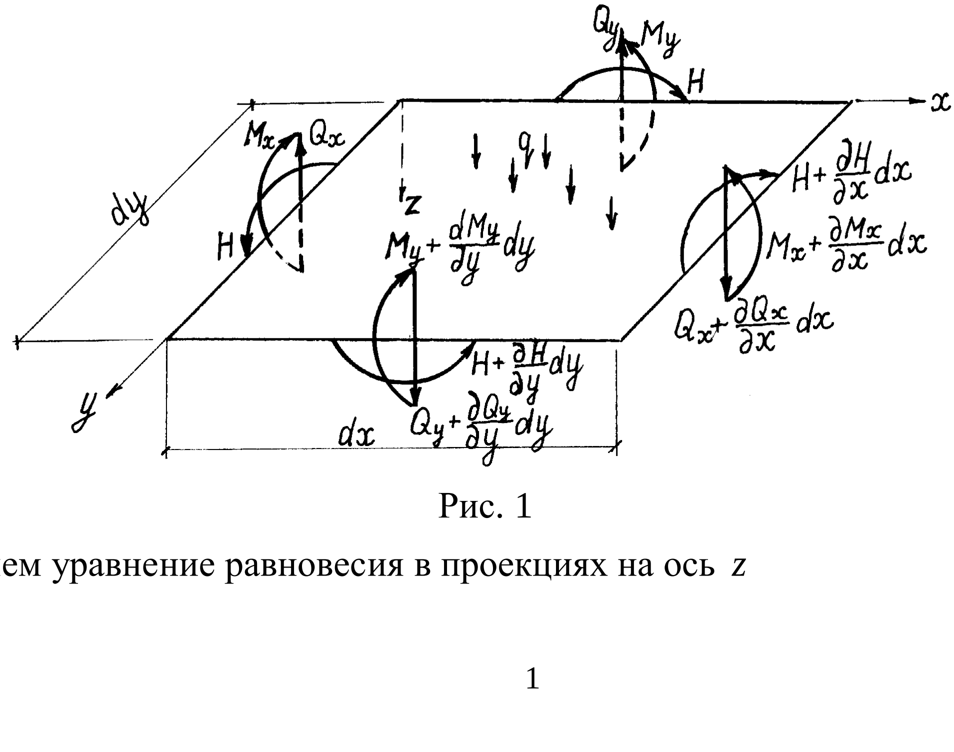

Рис. 1

Запишем уравнение равновесия в проекциях на ось z

$$\Sigma z = \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_x dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - Q_y dx + q dx dy = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, после сокращения на $dxdy$ получим

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q. \tag{2}$$

Далее запишем уравнение моментов сил относительно оси Oy

$$\Sigma M_{Oy} = \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_x dx dy - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \right) dy dx -$$

$$-\left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} + Q_y dx \frac{dx}{2} + \left(H + \frac{\partial H}{\partial y} dy \right) dx - H dy dx - q dx dy \frac{dx}{2} = 0.$$

Раскрывая скобки, приводим подобные и отбрасываем слагаемые третьего порядка малости (содержащие произведения трех дифференциалов). Оставшиеся слагаемые сокращаем на произведение $dxdy$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x. \tag{3}$$

Аналогичное соотношение получаем из уравнения моментов относительно оси Ox

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = Q_y. \tag{4}$$

Продифференцируем (3) по x, (4) по y и подставим производные поперечных сил в (2)

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = -q.$$

Подставим сюда выражения изгибающих и крутящего моментов через прогиб

$$-D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = -q.$$

После приведения подобных членов получим

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q$$

или

$$D\nabla^4 w - q = 0. \tag{5}$$

Это дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности называют также *уравнением Софи Жермен*. Уравнение Софи Жермен является дифференциальным уравнением в частных производных четвертого порядка. Функция прогибов $w(x,y)$ получается интегрированием этого уравнения с учетом условий на контуре пластинки – граничных условий.

Граничные условия

Как известно, различают два типа граничных условий: *геометрические* и *статические*. В геометрических условиях задаются величины линейных и угловых перемещений, в данном случае прогибов и углов поворота нормали к срединной плоскости. Статические условия задают величины усилий. При изгибе пластинки это изгибающие и крутящий моменты, а также поперечные силы.

При расчете прямоугольной пластинки появляется необходимость учета восьми граничных условий – по два на каждом краю.

Рассмотрим прямоугольную пластинку (рис. 2) с различными закреплениями краев и покажем какой вид для них имеют граничные условия.

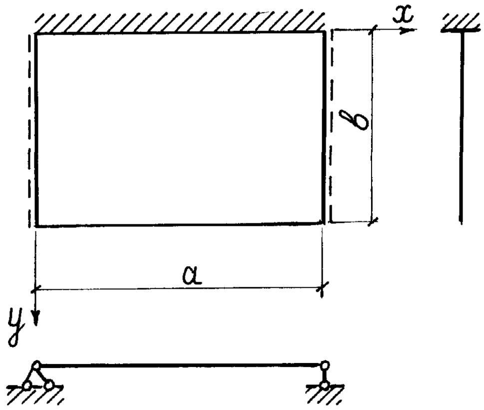

Рис. 2

На *защемленном краю* отсутствуют прогибы и углы поворота нормали к срединной плоскости в направлении, перпендикулярном к краю. На рис. 2 защемлен край $y = 0$. Для него

$$w = 0; \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

На шарнирно *опертом краю* (на рис. 2 при $x = 0$ и $x = a$) отсутствуют прогибы и изгибающие моменты в направлениях, перпендикулярных к краю,

$$w = 0; \qquad M_x = 0.$$

Выражая моменты через функцию прогибов, получаем

$$w = 0; \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Учитывая, что вдоль рассматриваемых краев прогибы не зависят от координаты y, окончательно найдем

$$w = 0; \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

На *свободном крае* (на рис. 2 при $y = b$) отсутствуют все погонные усилия

$$M_y = 0; \qquad Q_y = 0; \qquad H = 0.$$

Таким образом, имеем избыток граничных условий: три, вместо необходимых двух (в этом случае задача не имеет решения).

Чтобы избежать этого, рассмотрим действие крутящих моментов на свободном крае (рис. 3, а). На участке длиной dx суммарный крутящий момент Hdx заменим эквивалентной парой сил – двумя противоположно направленными силами величиной H, расположенными на расстоянии dx друг от друга (рис. 3, б). На соседнем участке dx эти силы будут иметь величину $H + \dfrac{\partial H}{\partial x}$.

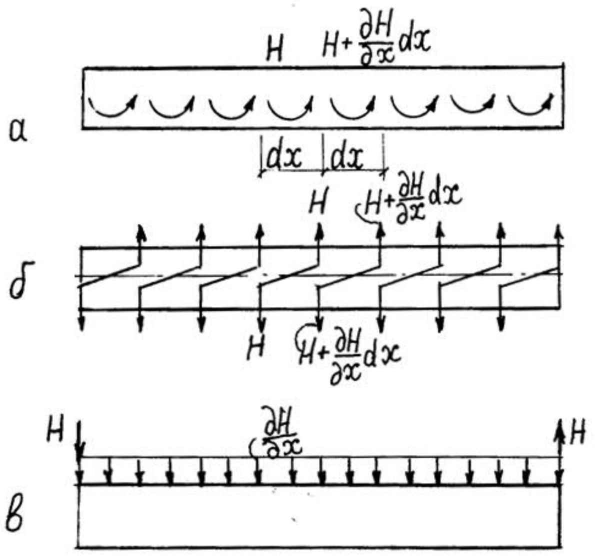

Рис. 3

При таком представлении действие крутящих моментов заменяется распределенной нагрузкой интенсивностью $\dfrac{\partial H}{\partial x}$ и двумя угловыми сосредоточенными силами H. Суммируя эту нагрузку с поперечной силой Q_y, получим некоторую приведенную поперечную силу

$$Q_{y\ прив.} = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x},$$

или с учетом выражений для Q_y и H

$$Q_{y\ прив.} = -D\left[\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w + (1-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right] = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right].$$

Теперь на свободном краю вместо трех условий можно записать два

$$M_y = 0; \qquad Q_{y\ прив.} = 0.$$

Выразив их через функцию прогибов, будем иметь

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$

Конечно, при этом граничные условия будут удовлетворяться приближенно. Но на основании принципа Сен-Венана такая замена поперечной силы и крутящего момента статически им эквивалентной приведенной поперечной силой вызовет лишь местные напряжения вблизи рассмотренного края пластинки.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая пластинка называется тонкой?
2. На каких гипотезах основывается техническая теория изгиба пластинок?
3. Какие деформации отсутствуют при изгибе тонкой пластинки?
4. Из каких условий находятся выражения для напряжений τ_{yz} и τ_{zx}?
5. Какие напряжения отсутствуют при изгибе тонкой пластинки?
6. Что такое погонные усилия?
7. Какие усилия при изгибе тонкой пластинки обращаются в ноль? Назовите остальные усилия.
8. Какой вид имеет дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки?
9. Как получают решение задачи изгиба пластинки?
10. Какие виды условий рассматриваются на контуре пластинки?
11. Какие граничные условия выполняются на защемленном, шарнирно опертом и свободном краях прямоугольной пластинки?