

ПРИМЕР РАСЧЕТА ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим пологую прямоугольную в плане оболочку, срединная поверхность которой является эллиптическим параболоидом (рис.8).

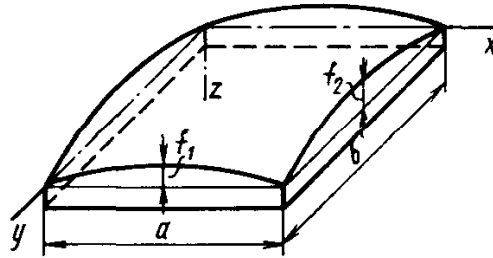


Рис. 8

Уравнение этой поверхности записывается следующим образом:

$$z = f \left[\frac{f_1}{f} \left(2 \frac{x}{a} - 1 \right)^2 + \frac{f_2}{f} \left(2 \frac{y}{b} - 1 \right)^2 - 1 \right],$$

где $f = f_1 + f_2$ — стрела подъема оболочки.

Очевидно, что

$$k_x \approx 8 \frac{f_1}{a^2}; \quad k_y \approx 8 \frac{f_2}{b^2}; \quad k_{xy} = 0.$$

Уравнения (14-15) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{E\delta} \nabla^4 \Phi + 8 \frac{f_1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 8 \frac{f_2}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0; \\ D \nabla^4 w - 8 \frac{f_1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 8 \frac{f_2}{b^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= q. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

По краям оболочка соединена с диафрагмами, абсолютно жесткими в их плоскости и гибкими из нее, вследствие чего на всех кромках обеспечиваются граничные условия:

при $x = 0, x = a$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad v = 0; \quad (17)$$

при $y = 0, y = b$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad u = 0. \quad (18)$$

Будем искать решение уравнений (16), в виде

$$w = \sum_{m, n} w_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y; \quad (19)$$

$$\Phi = \sum_{m, n} \Phi_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y. \quad (20)$$

Нетрудно убедиться в том, что первые три условия в (17) и (18) при принятых выражениях w и Φ удовлетворяются тождественно.

Проверим, выполняются ли последние граничные условия: $v = 0$ и $u = 0$. Найдем деформацию:

$$\epsilon_y^0 = \frac{1}{E\delta} (N_y - \mu N_x) = \frac{1}{E\delta} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right).$$

Пример расчета пологой оболочки (№17)

Используя равенство (20), имеем

$$\varepsilon_y^0 = -\frac{1}{E\delta} \sum_{m, n} \varphi_{mn} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} - \mu \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y.$$

При $x = 0$ и $x = a$

$$\varepsilon_y^0 \equiv 0.$$

Отсюда по (3) на указанных краях перемещение v тождественно равно константе, которую можно принять равной нулю. Аналогично можно показать, что на двух других краях перемещение u также тождественно равно нулю.

Следовательно, выражения (19), (20) удовлетворяют всем граничным условиям (17), (20).

Запишем функцию $q(x, y)$ в виде

$$q(x, y) = \sum_{m, n} q_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad (21)$$

где

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dx dy.$$

Подставим соотношения (19) . . . (21) в уравнения (16), из которых получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов w_{mn} , φ_{mn}

$$\frac{1}{E\delta} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right)^2 \varphi_{mn} - \frac{8\pi^2}{a^2b^2} (n^2f_1 + m^2f_2) w_{mn} = 0; \quad (22)$$

$$\frac{8\pi^2}{a^2b^2} (n^2f_1 + m^2f_2) \varphi_{mn} + D \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right)^2 w_{mn} = q_{mn}. \quad (23)$$

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} w_{mn} &= \left[\frac{n^4\pi^4\delta^4}{12(1-\mu^2)b^4} A_{mn} + \frac{64f_2\delta^2}{A_{mn}a^4} \left(\frac{f_1}{f} + \frac{m^2}{n^2} \frac{f_2}{f} \right)^2 \right]^{-1} \frac{q_{mn}\delta}{E}; \\ \varphi_{mn} &= \frac{8Eb^2f\delta}{\pi^2 A_{mn}a^2n^2} \left(\frac{f_1}{f} + \frac{m^2f_2}{n^2f} \right) w_{mn}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

причем

$$A_{mn} = \left(\frac{m^2b^2}{n^2a^2} + 1 \right)^2.$$

После того как определены функции w и Φ , нетрудно найти внутренние усилия, действующие в оболочке, см. (11), (13):

$$M_x = D \sum_{m, n} w_{mn} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \mu \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y;$$

$$M_y = D \sum_{m, n} w_{mn} \left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \mu \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y;$$

$$H = -D(1-\mu) \sum_{m, n} w_{mn} \frac{m\pi n^2}{ab} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y;$$

Пример расчета пологой оболочки (№17)

$$N_x = - \sum_{m, n} \varphi_{mn} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y;$$

$$N_y = - \sum_{m, n} \varphi_{mn} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y;$$

$$S = - \sum_{m, n} \varphi_{mn} \frac{mn\pi^2}{ab} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y.$$

В случае безмоментного напряженного состояния из уравнения (23) при $D = 0$ получим

$$\varphi_{mn} = \frac{q_{mn} a^2 b^2}{8\pi^2 n^2 f} \left(\frac{f_1}{f} + \frac{m^2}{n^2} \frac{f_2}{f} \right)^{-1}.$$

Тогда коэффициенты w_{mn} в разложении прогиба найдём из уравнения (24)

$$w_{mn} = \frac{q_{mn} A_{mn} a^4}{64E\delta f^2} \left(\frac{f_1}{f} + \frac{m^2 f_2}{n^2 f} \right)^{-2}.$$

Если в соотношениях (24) положить $f_1 = f_2 = 0$, то получим выражение для w_{mn} , справедливое для шарнирно опертой вдоль всех кромок прямоугольной пластины:

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{D} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^{-2}.$$

Для того, чтобы качественно и количественно оценить работу пологой оболочки под действием поперечной нагрузки, на рис. 9 представлены результаты расчета оболочки со следующими геометрическими и физическими характеристиками:

$$a = b = 100 \text{ см}; \quad \delta = 1 \text{ см}; \quad f_1 = f_2 = 5 \text{ см}; \quad E = 4 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \quad \mu = 0.17; \quad q = 1 \text{ кПа}.$$

На рис. 9, а показаны графики изменения прогиба оболочки вдоль среднего сечения ($y = a/2$) и вдоль диагонального сечения (рис. 9, б). Обращает на себя внимание то, что максимальное значение прогиб принимает не в центре оболочки (как это было в пластине), а в угловых зонах.

Эпюры внутренних усилий приведены на рис. (10), а...д. Эпюры N_x (рис. 10, а) и M_x (рис. 10, в) построены для среднего сечения оболочки ($y = a/2$), эпюра M_x (рис. 10, г) — для сечения с координатой $y = a/4$, эпюра сдвигающих усилий (рис. 10, б) и крутящего момента (рис. 10, д) — для крайнего сечения ($y = 0$).

Интересно отметить, что эпюры изгибающих моментов в оболочке имеют очертание, качественно отличающееся от очертания эпюр тех же моментов в пластине. Сравнение ординат эпюр моментов и значений прогиба в оболочке и пластине свидетельствует о том, что в пластинах указанные величины оказываются значительно (на порядок) больше, чем в оболочках.

Пример расчета пологой оболочки (№17)

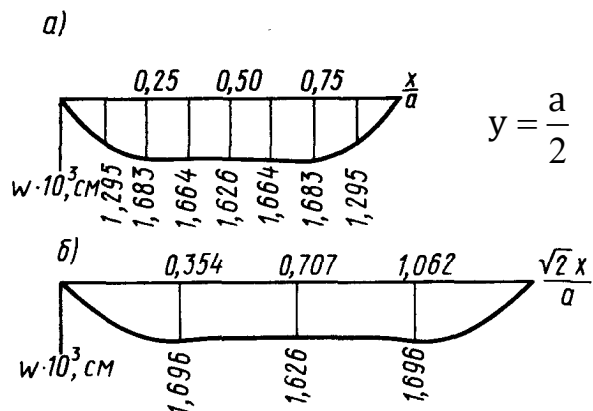


Рис. 9

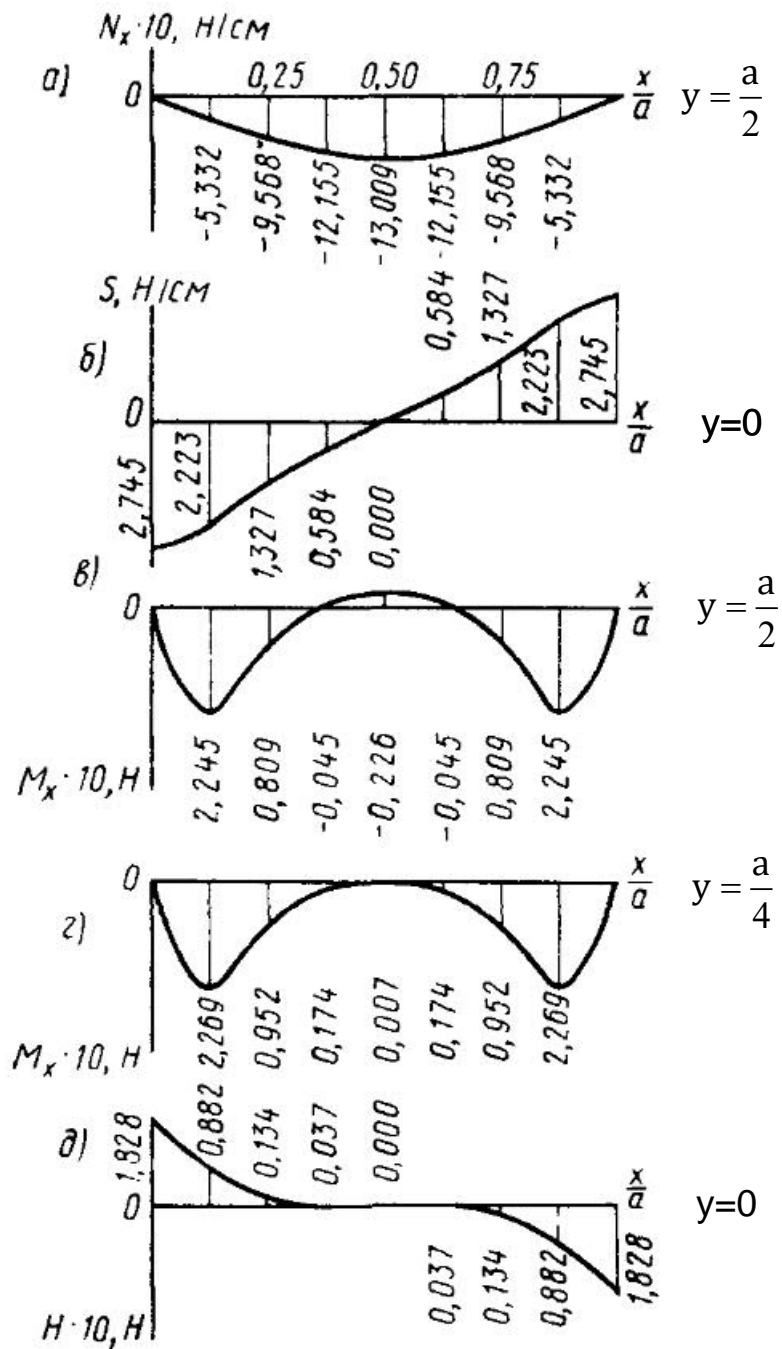


Рис. 10