

### Определение секториальных нормальных напряжений

Из первых двух гипотез следует, что при стеснённом кручении, как и при свободном кручении, депланации поперечных сечений развиваются по закону секториальных площадей (см. л-я №4(5))

$$\mathbf{u} = -\frac{d\varphi}{dx} \cdot \omega = -\varphi' \cdot \omega. \quad (11)$$

Отсюда найдём продольную деформацию

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -\varphi'' \cdot \omega,$$

и по закону Гука

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_s)$$

с учётом, что по четвёртому допущению  $\sigma_s = 0$ , получим

$$\sigma_\omega \equiv \sigma_x = \varepsilon_x E = -\varphi'' E \omega. \quad (12)$$

Так как множитель  $(-\varphi'' E)$  постоянен для всех точек сечения, то из (12) следует, что нормальные напряжения  $\sigma_x$  распределены в поперечном сечении по закону секториальных площадей  $\omega$ .

Ранее было дано понятие о бимоменте. В общем случае бимомент определяется как обобщённый силовой фактор, связанный с секториальным нормальным напряжением  $\sigma_\omega$  интегральным соотношением

$$\mathbf{B}_\omega = \int_A \sigma_\omega \omega dA. \quad (13)$$

Подставив сюда  $\sigma_\omega$  из (12), найдём

$$\mathbf{B}_\omega = -E\varphi'' \int_A \omega^2 dA = -E\mathbf{J}_\omega \varphi'', \quad (14)$$

где  $\mathbf{J}_\omega = \int_A \omega^2 dA$  – секториальный момент инерции сечения. Произведение

$E\mathbf{J}_\omega$  называется секториальной жёсткостью тонкостенного поперечного сечения. Размерность бимоента – кНм<sup>2</sup>.

Выражая отсюда  $\varphi''$  и подставляя в (12), получим

$$\sigma_\omega = \frac{\mathbf{B}_\omega \cdot \omega}{\mathbf{J}_\omega}. \quad (15)$$

Положительное напряжение  $\sigma_\omega > 0$ , получаемое по этой формуле, является растягивающим.

Подставляя  $\sigma_\omega$  из (15) в выражения (10) и сокращая на множитель  $\mathbf{B}_\omega / \mathbf{J}_\omega \neq 0$ , будем иметь

$$\int_A \omega dA = 0, \quad \int_A \omega \cdot z dA = 0, \quad \int_A \omega \cdot y dA = 0. \quad (16)$$

Из (16) следует, что в формулах (13)-(15) в качестве секториальных координат  $\omega$  должны использоваться главные секториальные координаты. Два последних равенства в (16) означают, что секториальный полюс следует

## Лекция №15

взять в центре кручения, из первого равенства следует, что начало отсчета секториальных координат располагается в главной нулевой секториальной точке.

**Определение секториальных касательных напряжений**

Для определения касательных напряжений  $\tau_\omega$  запишем уравнение равновесия отсечённого участка стержня (рис. 5), спроектировав все силы на ось  $x$ ,

$$-\tau_\omega dx \delta + dN^{\text{отс}} = 0. \quad (17)$$

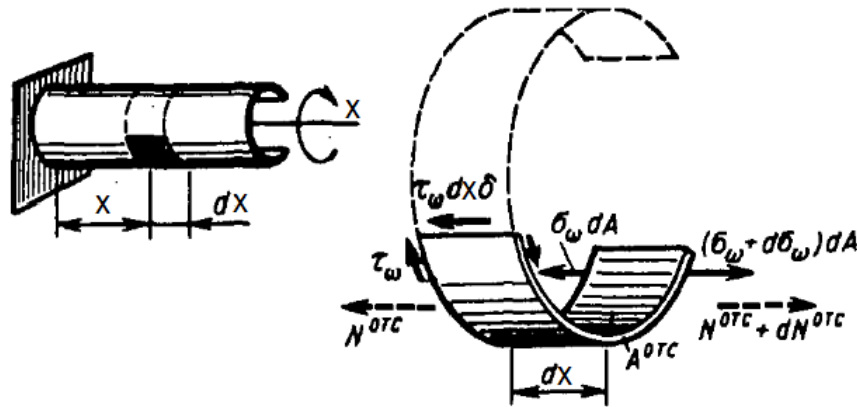


Рис. 5

Из (17) найдём  $\tau_\omega$

$$\tau_\omega = \frac{1}{\delta} \frac{dN^{\text{отс}}}{dx} \quad (18)$$

С использованием выражения (15) для  $\sigma_\omega$  найдём продольную силу  $N^{\text{отс}}$  на отсечённой площади  $A^{\text{отс}}$

$$N^{\text{отс}} = \int_{A^{\text{отс}}} \sigma_\omega dA = \frac{B_\omega}{J_\omega} \int_{A^{\text{отс}}} \omega dA = \frac{B_\omega}{J_\omega} S_\omega^{\text{отс}}, \quad (19)$$

где  $S_\omega^{\text{отс}}$  – секториальный статический момент отсечённой части сечения ( $\text{м}^4$ ).

Будем считать поперечное сечение стержня постоянным по длине. В этом случае в выражении (19)  $J_\omega$  и  $S_\omega^{\text{отс}}$  не будут зависеть от  $x$ . Тогда, подставляя (19) в (18), получим

$$\tau_\omega = \frac{dB_\omega}{dx} \cdot \frac{S_\omega^{\text{отс}}}{J_\omega \delta}. \quad (20)$$

Можно доказать, что между изгибно-крутильным моментом  $M_\omega$  и бимоментом  $B_\omega$  имеется следующая зависимость:

$$M_\omega = \frac{dB_\omega}{dx} = -EJ_\omega \varphi'''. \quad (21)$$

С учётом (21) выражение для  $\tau_\omega$  примет вид, аналогичный формуле Журавского для касательных напряжений при поперечном изгибе,

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega S_\omega^{\text{отс}}}{J_\omega \delta}. \quad (22)$$

## Лекция №15

На основании рис. 5 сформулируем правило знаков:

Напряжения  $\tau_{\omega} > 0$  в продольном сечении рассматриваемой отсечённой части стержня, если они направлены в сторону противоположную оси  $x$ .

При вычислении  $S_{\omega}^{отс}$  обход сечения может производиться в любом направлении. Направление обхода повлияет на знак  $S_{\omega}^{отс}$  и на направление напряжений  $\tau_{\omega}$  в продольном сечении стержня, но не повлияет на направление этих напряжений в поперечном сечении (рис. 6, a, b).

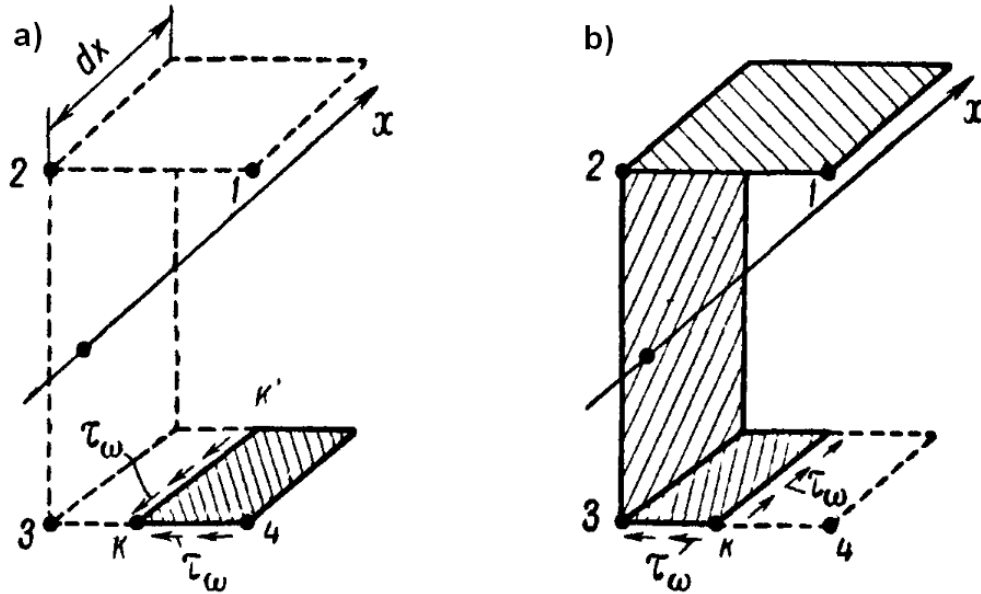


Рис. 6

В таблице ниже приведена сводка зависимостей теорий поперечного изгиба и стеснённого кручения, которая иллюстрирует аналогию между этими двумя видами деформации.

Аналогия в зависимостях теорий поперечного изгиба и стеснённого кручения

Изгиб	Кручение
Прогиб $v(x)$	Угол закручивания $\varphi(x)$
$J_z = \int_A y^2 dA$	$J_{\omega} = \int_A \omega^2 dA$
$M_z = \int_A \sigma_x y dA = -E J_z v''$	$B_{\omega} = \int_A \sigma_{\omega} \omega dA = -E J_{\omega} \varphi''$
$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} y$ $Q_y = \frac{dM_z}{dx} = -E J_z v'''$	$\sigma_{\omega} = \frac{B_{\omega}}{J_{\omega}} \omega$ $M_{\omega} = \frac{dB_{\omega}}{dx} = -E J_{\omega} \varphi'''$
$\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^{отс}}{J_z \delta}$	$\tau_{\omega} = \frac{M_{\omega} S_{\omega}^{отс}}{J_{\omega} \delta}$

## Лекция №15

Теперь для вычисления напряжений  $\sigma_\omega$  и  $\tau_\omega$  по формулам (15) и (22) необходимо найти функцию углов закручивания  $\varphi(x)$ , через которую выражаются внутренние усилия  $\mathbf{V}_\omega$  (14) и  $\mathbf{M}_\omega$  (21).

### Дифференциальное уравнение для углов закручивания и его общее решение

Дифференциальное уравнение для углов закручивания  $\varphi(x)$  получим, воспользовавшись соотношением (9), вытекающем из условия равновесия отсечённой части стержня,

$$\mathbf{M}_k + \mathbf{M}_\omega = \mathbf{M}_x. \quad (23)$$

В (23)  $\mathbf{M}_x$  – суммарный крутящий момент,  $\mathbf{M}_k$  – крутящий момент свободного кручения,  $\mathbf{M}_\omega$  – изгибно-крутящий момент. Подставим в (23) выражения (8) и (21) для моментов  $\mathbf{M}_k$  и  $\mathbf{M}_\omega$

$$\mathbf{G} \mathbf{J}_x \varphi' - \mathbf{E} \mathbf{J}_\omega \varphi''' = \mathbf{M}_x.$$

Продифференцируем это равенство по переменной  $x$

$$\mathbf{G} \mathbf{J}_x \varphi'' - \mathbf{E} \mathbf{J}_\omega \varphi'''' = \frac{d\mathbf{M}_x}{dx}. \quad (24)$$

Покажем, что правая часть равенства (24) равна  $-\mathbf{m}$  – интенсивности распределённой скручивающей нагрузки, взятой с обратным знаком. Рассмотрим равновесие участка стержня длиной  $dx$  (рис. 7).

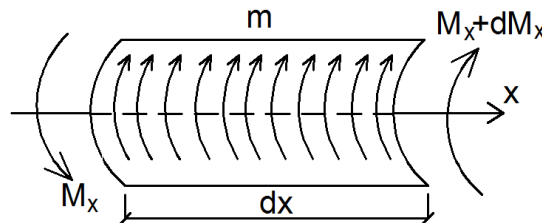


Рис. 7

$$\Sigma m_x = 0, \quad \mathbf{M}_x + d\mathbf{M}_x + \mathbf{m} dx - \mathbf{M}_x = 0, \quad \frac{d\mathbf{M}_x}{dx} = -\mathbf{m}. \quad (25)$$

С учётом (25) перепишем (24) в виде

$$\frac{d^4\varphi}{dx^4} - k^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{E} \mathbf{J}_\omega}, \quad k = \sqrt{\frac{\mathbf{G} \mathbf{J}_x}{\mathbf{E} \mathbf{J}_\omega}}. \quad (26)$$

В (26)  $k$  – изгибно-крутильная характеристика. Решение уравнения (26) равно сумме общего решения однородного уравнения (27)

$$\frac{d^4\varphi}{dx^4} - k^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \quad (27)$$

и частного решения неоднородного уравнения (26).

Общее решение уравнения (27) имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \operatorname{ch} kx + C_4 \operatorname{sh} kx. \quad (28)$$

## Лекция №15

В (28)

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

гиперболический косинус и гиперболический синус.

Частное решение неоднородного уравнения (26) зависит от вида  $\mathbf{m}$ . Рассмотрим случай, когда  $\mathbf{m}=\mathbf{0}$ . В этом случае уравнение (26) совпадает с уравнением (27) и функция (28) даёт его решение.

Преобразуем решение (28) к форме метода начальных параметров, для чего сформулируем следующие граничные условия при  $x=0$ :

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi_0; \quad \varphi'(0) = \varphi'_0; \quad M_x(0) = (G J_x \varphi' - E J_\omega \varphi''')_{x=0} = M_0; \\ B_\omega(0) &= -E J_\omega \varphi''(0) = B_0. \end{aligned} \quad (29)$$

Подставим (28) в (29) и найдём произвольные постоянные:

$$C_1 = \varphi_0 + \frac{B_0}{G J_x}; \quad C_2 = \frac{M_0}{G J_x}; \quad C_3 = -\frac{B_0}{G J_x}; \quad C_4 = \frac{1}{k} \left( \varphi'_0 - \frac{M_0}{G J_x} \right)$$

Внося их значения в (28) и группируя слагаемые при соответствующих начальных параметрах  $\varphi_0$ ,  $\varphi'_0$ ,  $M_0$  и  $B_0$  получим общее решение однородного уравнения (27) в виде

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{\varphi'_0}{k} \operatorname{sh} kx + \frac{B_0}{G J_x} (1 - \operatorname{ch} kx) + \frac{M_0}{k G J_x} (kx - \operatorname{sh} kx). \quad (30)$$

Из соотношения (30) для  $\varphi(x)$  с учётом значения для  $k^2$  по (26) найдём выражения для внутренних усилий:

$$\left. \begin{aligned} M_k &= G J_x \varphi' = \varphi'_0 G J_x \operatorname{ch} kx - B_0 k \operatorname{sh} kx + M_0 (1 - \operatorname{ch} kx); \\ B_\omega &= -E J_\omega \varphi'' = -\varphi'_0 E J_\omega k \operatorname{sh} kx + B_0 \operatorname{ch} kx + \frac{M_0}{k} \operatorname{sh} kx; \\ M_\omega &= B'_\omega = -\varphi'_0 G J_x \operatorname{ch} kx + B_0 k \operatorname{sh} kx + M_0 \operatorname{ch} kx. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Складывая первую и третью строки, получим  $M_k + M_\omega = M_0$ , что соответствует (23).

Поясним примером вычисления  $M_0$  и  $B_0$  при заданных сосредоточенных силах в сечении  $x=0$  (рис. 8).

$$B_0 = \int_A \sigma_x \omega dA = \int_{\Delta A} \frac{P_i}{\Delta A} \omega dA = \frac{P_i}{\Delta A} \int_{\Delta A} \omega dA = \frac{P_i}{\Delta A} \omega_i \Delta A = P_i \omega_i.$$

При наличии в сечении нескольких продольных сил бимомент определяется путем суммирования:  $B_0 = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \omega_i$ .

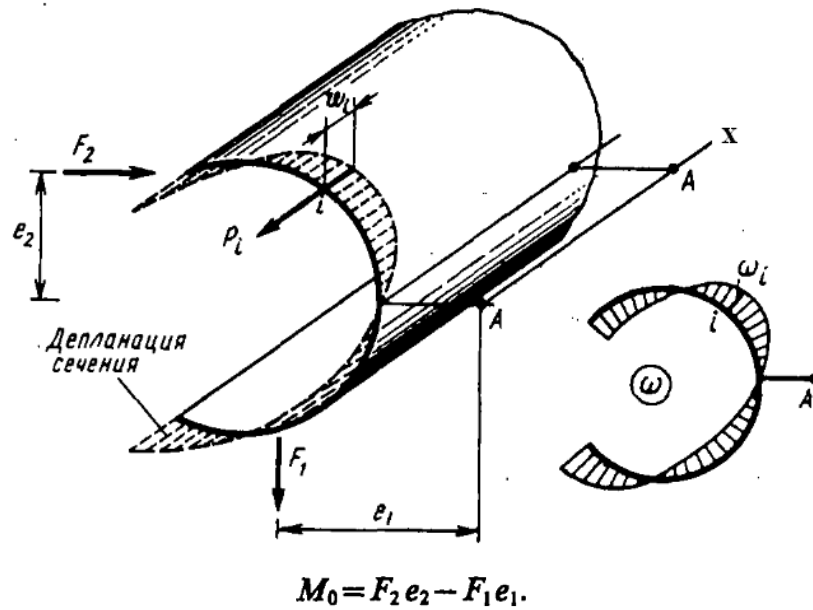


Рис. 8

При наличии распределённого момента  $\mathbf{m}_0 = \text{const}$  к общему решению однородного уравнения (30) надо добавить частное решение уравнения (26), имеющее вид

$$\varphi_{\text{частн}} = -\frac{\mathbf{m}_0}{k^2 G J_x} \left( 1 + \frac{1}{2} k^2 x^2 - \text{ch } kx \right).$$

Если стержень имеет несколько участков загрузки, то решение для  $n$ -го участка будет иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \varphi_0 + \frac{\varphi'_0}{k} \text{sh } kx + \frac{B_0}{G J_x} (1 - \text{ch } kx) + \frac{M_0}{k G J_x} (kx - \text{sh } kx) - \\ & - \frac{\mathbf{m}_0}{k^2 G J_x} \left( 1 + \frac{1}{2} k^2 x^2 - \text{ch } kx \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{\Delta B_i}{G J_x} (1 - \text{ch } kx_i) + \frac{\Delta M_i}{k G J_x} (kx_i - \text{sh } kx_i) - \right. \\ & \left. - \frac{\Delta \mathbf{m}_i}{k^2 G J_x} \left( 1 + \frac{1}{2} k^2 x_i^2 - \text{ch } kx_i \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь для краткости обозначено  $x_i = x - a_i$ . Приращения определяются так:  $\Delta \mathbf{m}_i = \Delta \mathbf{q}_i \mathbf{e}$ ,  $\Delta B_i = P_i \omega_i$  (рис. 9),  $\Delta M_i$  – сосредоточенный крутящий момент в сечении  $x = a_i$ .

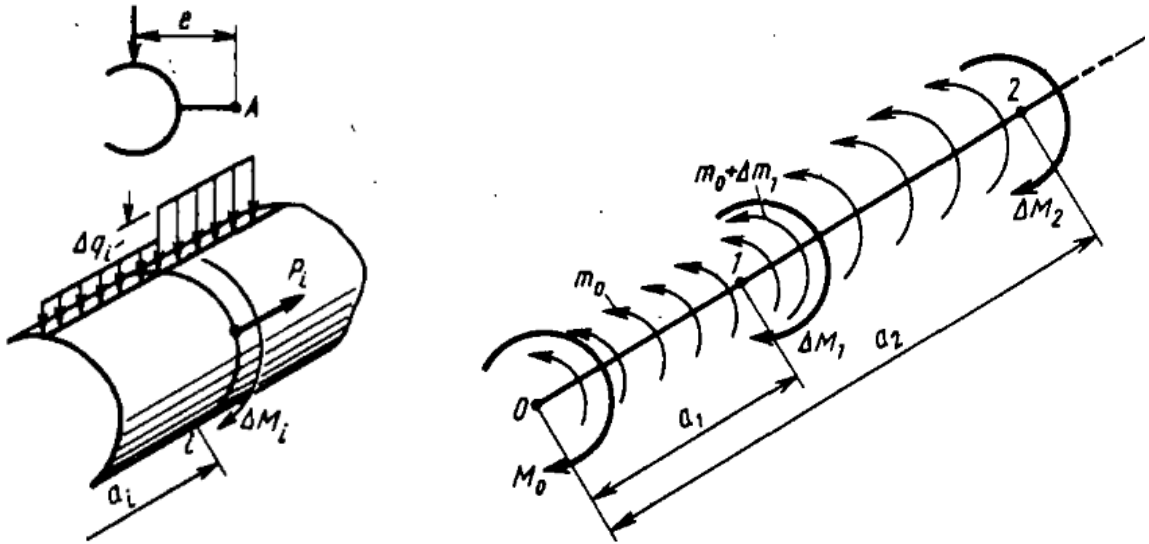


Рис. 9

Обычно часть из четырех начальных параметров  $\varphi_0$ ,  $\varphi'_0$ ,  $M_0$  и  $V_0$  бывает известна, а неизвестные находятся из граничных условий на другом конце стержня.

В жёсткой заделке (рис. 10,а) должны выполняться кинематические условия:

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi'_0 = 0.$$

Второе равенство объясняется тем, что в жесткой заделке отсутствуют перемещения  $u$ , которые пропорциональны  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ .

На конце стержня, закрепленном от закручивания при отсутствии связей, препятствующих свободной деформации, должны выполняться условия (рис. 10,б)

$$\varphi = 0, \quad V_\omega = 0.$$

Второе равенство обусловлено отсутствием на торце нормальных напряжений  $\sigma_\omega$ .

На свободном конце стержня, нагруженном внешним скручивающим моментом  $M$ , выполняются равенства (рис. 10,в)

$$M_x = M_k + M_\omega = -M; \quad V_\omega = 0.$$

В жёсткой заделке должны выполняться кинематические условия:

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi'_0 = 0.$$

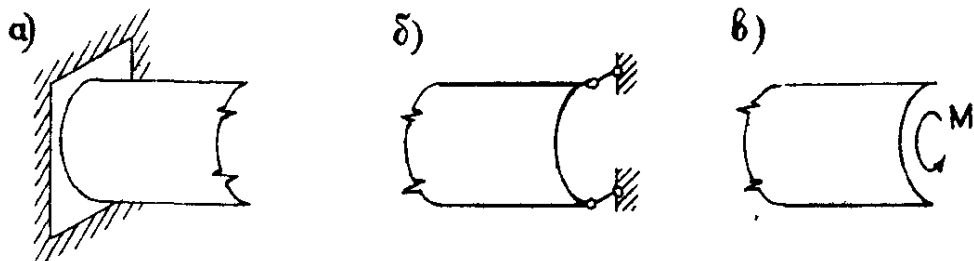


Рис. 10