

Строительная механика

*Методические указания
к расчётно–графической работе
по курсам «Сопротивление материалов»,
«Теория расчёта пластин и оболочек»
для студентов всех специальностей
дневной формы обучения*

Воронеж 2023

Министерство науки и высшего
образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

Кафедра строительной механики

РАСЧЁТ ТОНКОСТЕННЫХ РЕЗЕРВУАРОВ

Методические указания
к расчётно–графической работе
по курсам «Сопротивление материалов»,
«Теория расчета пластин и оболочек»
для студентов всех специальностей
дневной формы обучения

Воронеж 2023

УДК 624
ББК 38.72

Составители: Р.А. Мухтаров, А.В. Резунов

Расчёт тонкостенных резервуаров: Методические указания к расчётно - графической работе по дисциплинам «Сопротивление материалов», «Теория расчёта пластин и оболочек» для всех специальностей дневной формы обучения/ Воронеж. гос. техн. ун-т.:

Р.А. Мухтаров, А.В. Резунов.–Воронеж, 2023.- 22 с.

Даются указания по расчёту тонкостенных резервуаров. Приведены примеры расчётов.

Предназначаются для студентов всех специальностей дневной формы обучения.

Ил. 11. Табл. 1. Библиогр.: 3 назв.

Печатается по решению редакционно–издательского совета Воронежского государственного технического университета.

Рецензент - Воронежского государственного технического университета.

Введение

Стенки резервуаров, испытывающих внутреннее давление воды, пара или газа, находятся в состоянии двустороннего растяжения. К таким резервуарам относятся паровые котлы, резервуары водонапорных башен, нефтебаки и др. Одной из особенностей такого рода конструкций является малая толщина стенки δ по сравнению с общими габаритами ёмкости. Это позволяет объединить их термином тонкостенные резервуары.

Тонкостенные резервуары обычно представляют собой тела вращения, т.е. их поверхность может быть образована вращением некоторой плоской кривой (рис.1.1а) или ломаной линии (рис.1.1б) вокруг оси $O-O$, расположенной в одной с ней плоскости.

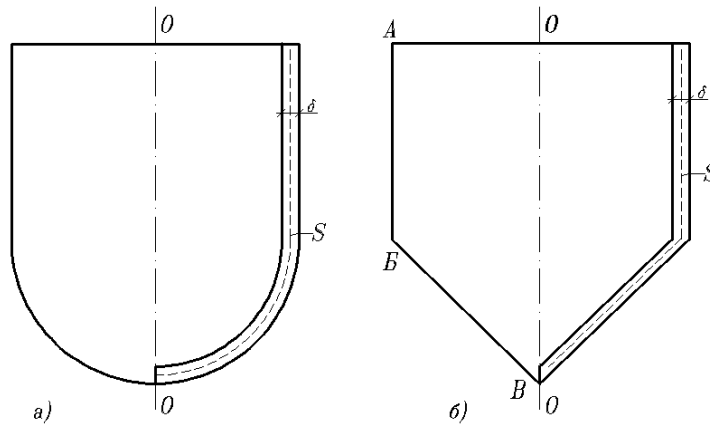


Рис. 1.1 – Некоторые виды резервуаров

Поверхность S , делящая резервуар пополам по толщине, называется **срединной поверхностью**. Сечение резервуара плоскостью, содержащей ось $O-O$, называется **меридиональным**, а сечение поверхностью, перпендикулярной меридиану, т.е. к кривой S , к прямой AB или BV – **окружным** (рис. 1.2).

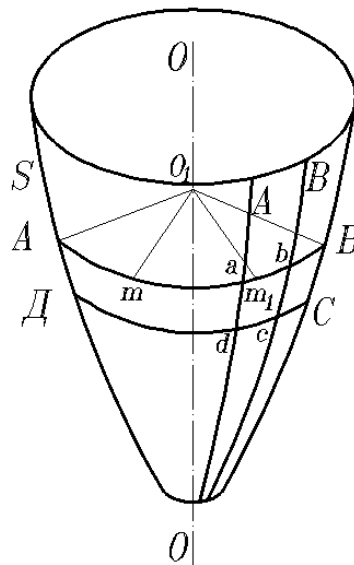


Рис. 1.2 – Меридиональные и окружные сечения

В настоящих методических указаниях рассматривается расчёт заполненных жидкостью цилиндрических резервуаров с коническим и сферическим днищами, для которых определяются **меридиональные** нормальные напряжения σ_m , действующие в окружных сечениях, и **окружные** напряжения σ_t , действующие в меридиональных сечениях, а также проверяется условие прочности в характерных точках стенок.

1. Основные положения теории

В общем случае при действии нагрузки, которая не меняется в окружном направлении, а может меняться лишь в меридиональном, элемент срединной поверхности резервуара, выделенный двумя меридиональными и двумя окружными сечениями, растягивается в двух взаимно перпендикулярных направлениях и, кроме того, искривляется. Двустороннему растяжению соответствуют продольные силы, а искривлению элемента в меридиональном и окружном направлениях – изгибающие моменты.

Во многих задачах оказывается возможным пренебречь нормальными напряжениями от изгиба, так как преобладающее значение на напряжения в стенках резервуара имеют продольные силы.

Напряженное состояние стенок резервуара, при котором изгибающие моменты пренебрежимо малы, называют **безмоментным**, а теорию расчета без учета моментов – **безмоментной**.

1.1 Определение напряжений в стенках резервуаров по безмоментной теории

Двумя меридиональными и двумя окружными сечениями выделим из стенки резервуара бесконечно малый элемент и рассмотрим его равновесие (рис. 1.3).

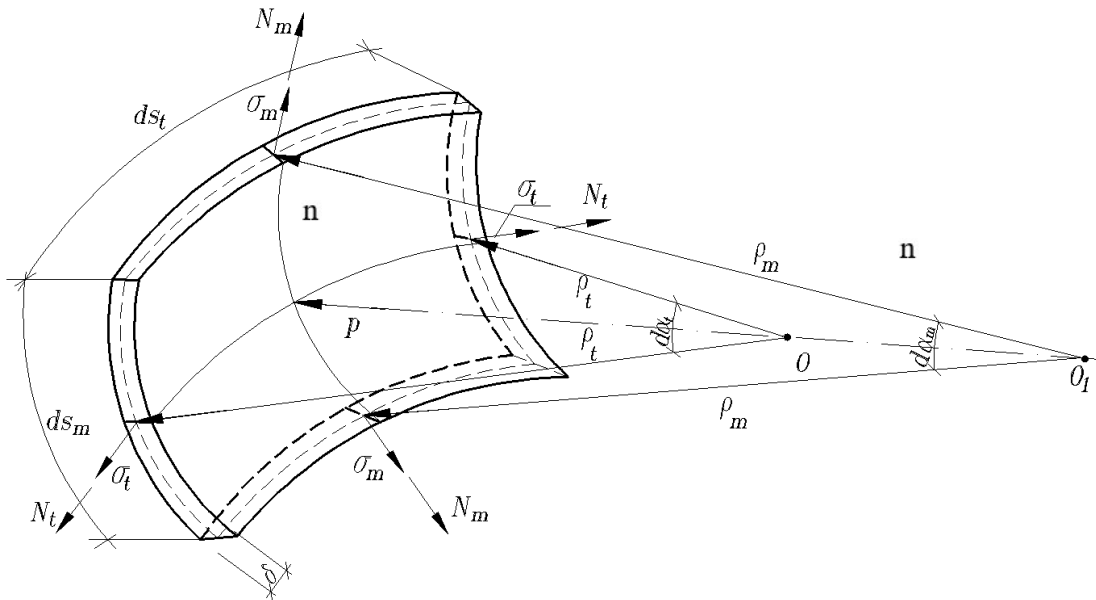


Рис. 1.3 – Элемент стенки резервуара

Так как нагрузка на стенки сосуда P (давление жидкости или газа) не зависит от угла поворота вокруг оси $O-O_1$, то касательные напряжения на боковых гранях элемента будут отсутствовать. Следовательно, на выделенный элемент действуют только нормальные напряжения (рис. 1.3):

σ_m - меридиональное напряжение, действующее в окружных сечениях;

σ_t - окружное напряжение, действующее в меридиональных сечениях.

Будем считать, что напряжения σ_m и σ_t распределены по площадкам, на которых действуют, равномерно. Все размеры резервуара отнесем к срединной поверхности его стенок. Срединная поверхность представляет собой поверхность двойной кривизны. Радиус кривизны меридиана в центре элемента обозначим через ρ_m , а окружного сечения – через ρ_t .

Спроектируем все силы на нормаль n - n к элементу abcd

$$\begin{aligned} 2 \cdot N_m \cdot \sin \frac{d\alpha_m}{2} + 2 \cdot N_t \cdot \sin \frac{d\alpha_t}{2} - p \cdot dS_m \cdot dS_t = \\ = 2 \cdot \sigma_m \cdot \delta \cdot dS_t \cdot \sin \frac{d\alpha_m}{2} + 2 \cdot \sigma_t \cdot \delta \cdot dS_m \cdot \sin \frac{d\alpha_t}{2} - p \cdot dS_m \cdot dS_t = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

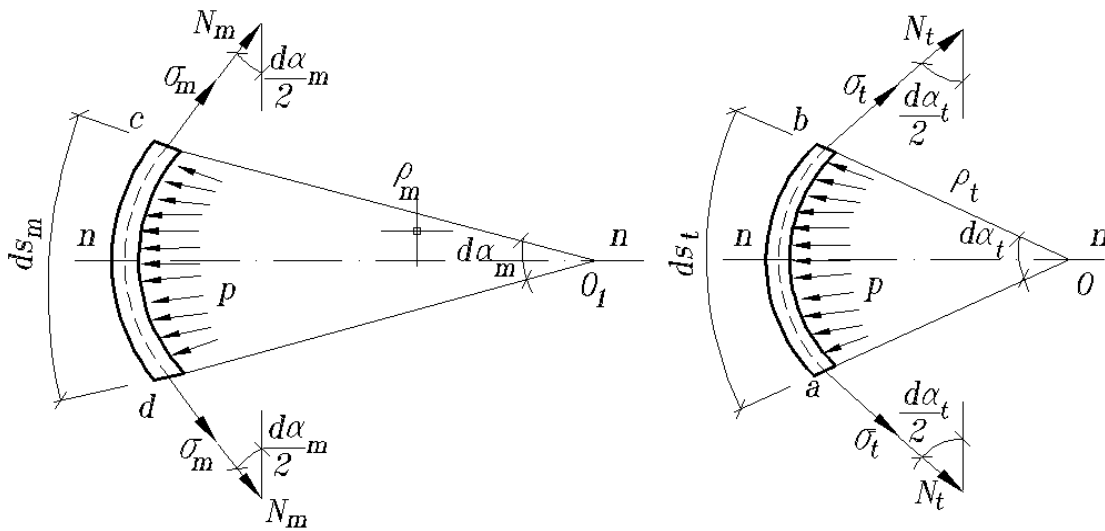


Рис. 1.4 – Вертикальное и горизонтальное сечения элемента (рис. 1.3) плоскостями, проходящими через нормаль n-n

Ввиду малости углов будем считать

$$\sin \frac{d\alpha_m}{2} \approx \frac{d\alpha_m}{2} \quad \text{и} \quad \sin \frac{d\alpha_t}{2} \approx \frac{d\alpha_t}{2}. \quad (1.2)$$

Подставим (1.2) в (1.1) и разделим все слагаемые на $dS_m \cdot dS_t \cdot \delta$. Будем иметь

$$\sigma_m \cdot \frac{d\alpha_m}{dS_m} + \sigma_t \cdot \frac{d\alpha_t}{dS_t} = \frac{p}{\delta}. \quad (1.3)$$

С учетом, что в (1.3) $\frac{d\alpha_t}{dS_t} = \frac{1}{\rho_t}$, $\frac{d\alpha_m}{dS_m} = \frac{1}{\rho_m}$, получим равенство

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}, \quad (1.4)$$

где ρ_m и ρ_t радиусы кривизны меридионального и окружного сечений соответственно. Уравнение (1.4) называется уравнением Лапласа.

В уравнение Лапласа входят неизвестные напряжения σ_m и σ_t . Определим меридиональное напряжение σ_m . Для этого составим уравнение проекций на ось О-О всех сил, действующих на часть резервуара ниже окружного сечения, проходящего через центр элемента abcd.

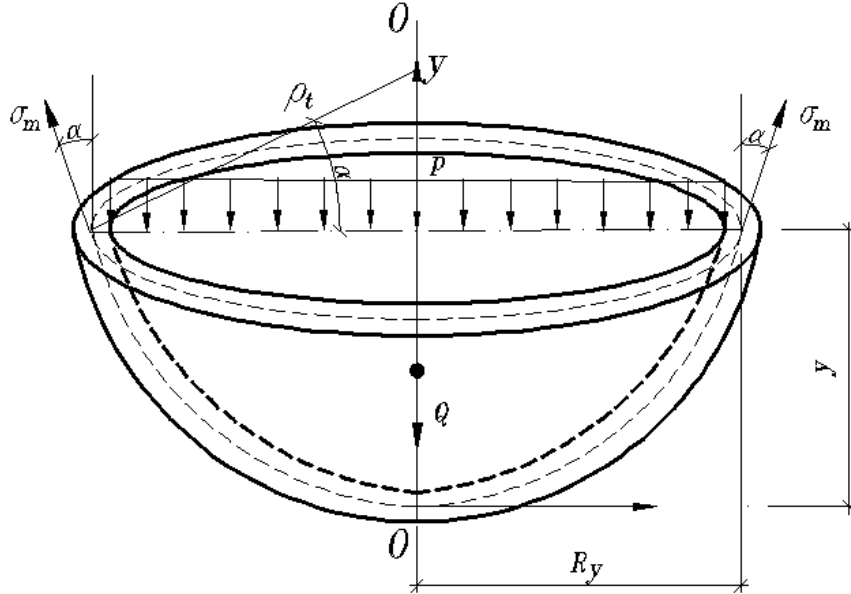


Рис. 1.5 – Отсеченная часть резервуара

$$\sigma_m \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_y \cdot \delta \cdot \cos \alpha - p \cdot \pi \cdot R_y^2 - Q = 0. \quad (1.5)$$

Отсюда получим

$$\sigma_m = \frac{p \cdot R_y}{2 \cdot \delta \cdot \cos \alpha} + \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot R_y \cdot \delta \cdot \cos \alpha}, \quad (1.6)$$

где R_y – расстояние от центра элемента до оси О-О, Q – вес части резервуара и жидкости, лежащих ниже рассматриваемого сечения, p – давление жидкости, по закону Паскаля одинаковое во всех направлениях и равное γh , h – глубина жидкости в рассматриваемой точке, γ – удельный вес жидкости. Если жидкость хранится под некоторым избыточным давлением q , то в этом случае $p = \gamma h + q$.

Уравнение (1.4) и формула (1.6) позволяют найти оба напряжения σ_m и σ_t в каждой точке стенок резервуара.

Необходимо отметить, что в местах, где поверхность резервуара имеет резкий излом, как, например, в месте соединения цилиндрической и конической частей, радиальная составляющая меридиональных напряжений не уравновешена.

Эта составляющая по периметру кольца создаёт радиальную нагрузку, стремящуюся согнуть кромки цилиндрической оболочки внутрь. Для устранения этого изгиба ставится ребро жёсткости в виде уголка или швеллера, опоясывающего сосуд в месте перелома. Это ребро воспринимает радиальную нагрузку.

Однако постановка рёбер жёсткости полностью не устраняет изгиба стенок резервуара. В результате образующие поверхности резервуара вблизи кольца жёсткости искривляются. Явление это носит название **краевого эффекта**. Оно может привести к значительному местному возрастанию напряжений в стенках резервуара.

2. Исходные данные и задание к расчётной работе

Студенту предлагается произвести расчёт тонкостенного резервуара с коническим или сферическим дном, расчётные схемы которых представлены на рис. 2.1.

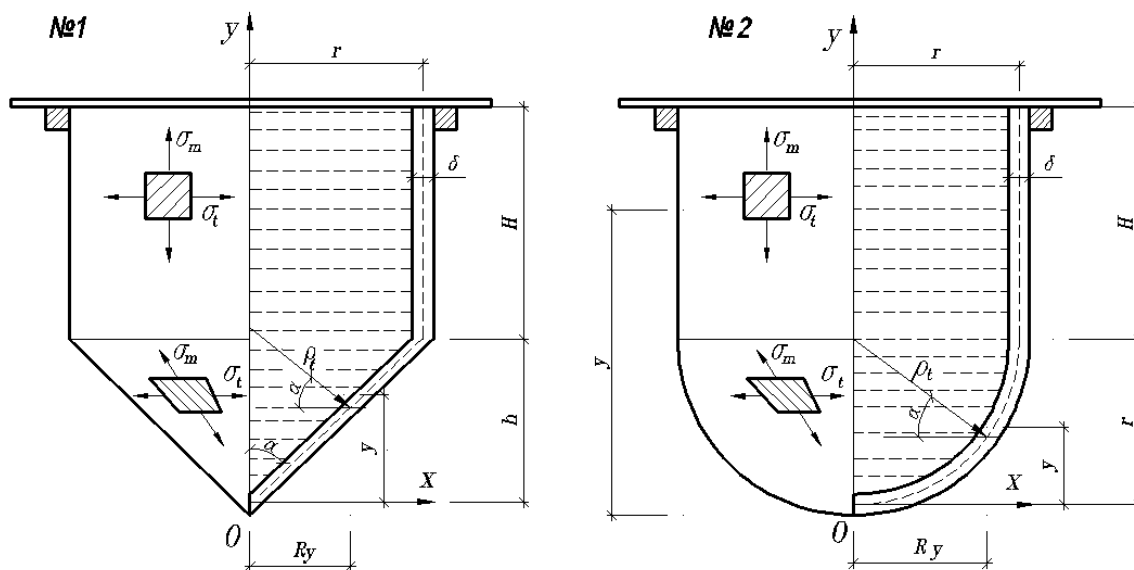


Рис. 2.1 – Расчётные схемы резервуара

Задаются: радиус r и высота H цилиндрической части резервуара, высота h конической (или r сферической) части, толщина стенки δ , удельный вес жидкости γ . Собственным весом резервуара по сравнению с весом жидкости пренебрегается.

Требуется: вычислить меридиональные σ_m и окружные σ_t напряжения, построить графики (эпюры) распределения их по высоте резервуара, а также проверить условие прочности в характерных точках по энергетической теории. Для конической части расчётной схемы №1 это точки с координатами $y = 0, h/2, h$. В цилиндрической части этой схемы – точки с координатами $y = h, h + H$. Для сферической части расчётной схемы №2 это точки с координатами $\alpha = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. В цилиндрической части схемы №2 – точки с координатами $y = r, r + H$.

Задание выполняется по индивидуальному шифру каждого студента, состоящему из трёх букв: первых букв фамилии, имени и отчества студента.

В соответствии с шифром из табл. 2.1 принимаются исходные данные задачи.

Например, студент Петров Евгений Николаевич имеет шифр

ПЕН.

По первой букве шифра из табл. 1.1 принимаются: номер расчётной схемы, высота h конической части (для схемы №1) или радиус r сферической части (схема №2).

По второй букве шифра принимаются: высота H цилиндрической части, и толщина стенки δ резервуара.

По третьей букве шифра из этой же таблицы принимается удельный вес жидкости.

Таблица 2.1

Исходные данные к задачам

	Для первой буквы фамилии			Для первой буквы имени		Для первой буквы отчества
	Номер расчётной схемы	h , м	r , м	H , м	δ , м	$\gamma \cdot 10^{-3}$, $МН/м^3$
1	2	3	4	5	6	7
А	1	3,4	4,2	4,2	0,001	10,0
Б	2	-	3,2	3,8	0,002	11,0
В	2	-	3,4	3,8	0,001	11,2
Г	1	3,6	4,0	4,0	0,001	10,0
Д	2	-	3,6	4,2	0,002	10,2
Е	1	3,2	4,0	3,0	0,001	10,8
Ж	1	3,6	4,2	4,0	0,001	9,6
З	1	3,8	4,4	3,8	0,001	9,4
И	2	-	2,8	4,2	0,002	9,6
К	1	3,2	4,0	4,4	0,001	9,6
Л	2	-	3,2	4,2	0,001	9,8
М	2	-	3,4	4,0	0,001	10,2
Н	1	3,4	3,6	4,2	0,002	10,2
О	2	-	3,6	4,0	0,002	11,2
П	1	2,4	4,8	3,8	0,001	11,0
Р	1	3,4	4,0	3,6	0,001	11,0
С	1	3,2	3,8	3,6	0,001	11,2
Т	2	-	3,8	4,0	0,002	10,6
У	2	-	3,8	3,8	0,001	10,4
Ф	2	-	4,0	3,4	0,001	10,2
Х	1	3,6	4,2	3,8	0,001	10,6
Ц	2	-	3,6	4,0	0,001	10,8
Ч	2	-	3,8	4,2	0,002	10,0
Ш	1	3,2	3,4	4,2	0,002	11,0
Щ	1	3,4	4,0	4,0	0,001	10,2
Э	1	2,8	3,6	4,2	0,002	10,4
Ю	2	-	4,0	3,8	0,001	10,6
Я	1	2,8	3,8	3,8	0,001	10,4

Таким образом, шифру ПЕН из табл. 2.1 соответствуют следующие исходные данные:

схема №1, $h = 2.4 \text{ м}$, $r = 4.8 \text{ м}$, $H = 3.0 \text{ м}$, $\delta = 0.001 \text{ м}$,
 $\gamma = 10.2 \cdot 10^{-3} \text{ МН/м}^3$.

3. Пример расчёта цилиндрического резервуара с коническим дном

Расчетная схема резервуара приведена на рис. 2.1 (схема №1). Начало координат рекомендуется установить в нижней точке срединной поверхности.

Исходные данные:

$r = 4.0 \text{ м}$, $H = 3.0 \text{ м}$, $h = 2.0 \text{ м}$, $\gamma = 10.0 \cdot 10^{-3} \text{ МН/м}^3$, $\delta = 0.002 \text{ м}$,
 общее для всех вариантов расчётное сопротивление $R = 200 \text{ МПа}$.

Расчёт ведётся отдельно для конической и цилиндрической частей.

3.1. Расчёт конической части $0 \leq y \leq h$

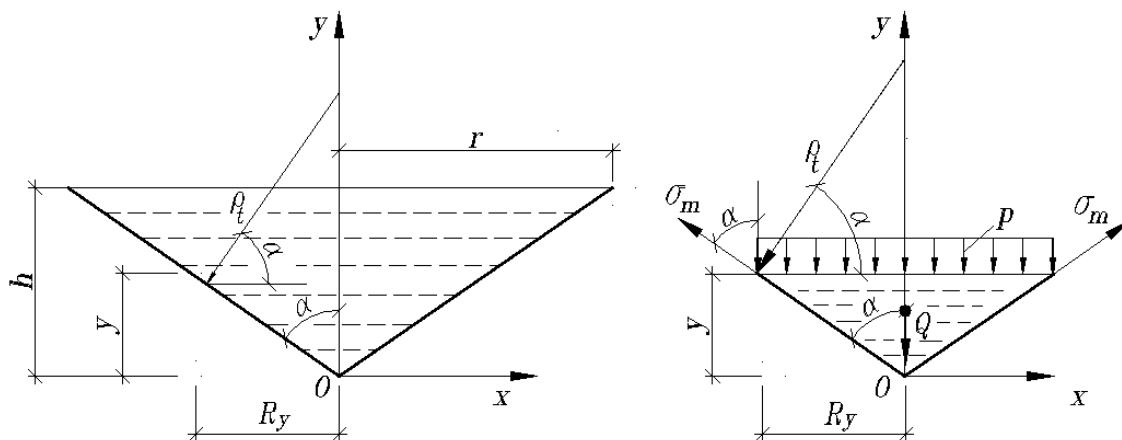


Рис. 3.1 – Расчётная схема конической части

Вычислим вначале напряжения σ_t . Для этого получим выражения, определяющие радиусы кривизн ρ_t и ρ_m , которые входят в уравнение (1.4). Из расчётной схемы (рис. 3.1 видно:

$$\rho_t = \frac{R_y}{\cos \alpha}; \quad (3.1)$$

где R_y удовлетворяет равенству

$$\frac{R_y}{r} = \frac{y}{h}.$$

Отсюда получим

$$R_y = \frac{r \cdot y}{h} \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1), получим

$$\rho_t = \frac{r \cdot y}{h \cdot \cos \alpha} \quad (3.3)$$

Учитывая, что $\rho_m = \infty$, из уравнения (1.4) определим

$$\sigma_t = \frac{p \cdot \rho_t}{\delta} = \frac{p \cdot r \cdot y}{\delta \cdot h \cdot \cos \alpha} \quad (3.4)$$

где $p = \gamma \cdot (H + h - y)$ - гидростатическое давление.
Тогда окончательно получим

$$\sigma_t = \frac{\gamma \cdot r \cdot y \cdot (H + h - y)}{\delta \cdot h \cdot \cos \alpha} \quad (3.5)$$

Подставляя исходные данные, а также учитывая, что

$$\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} = 0,4472,$$

найдем:

$$\text{при } y = 0; \quad \sigma_t = 0;$$

$$\begin{aligned} \text{при } y = \frac{h}{2}; \quad \sigma_t &= \frac{\gamma \cdot r \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(H + h - \frac{h}{2}\right)}{\delta \cdot h \cdot \cos \alpha} = \frac{\gamma \cdot r \cdot h \cdot (2H + h)}{4 \cdot \delta \cdot h \cdot \cos \alpha} = \\ &= \frac{\gamma \cdot r \cdot (2H + h)}{4 \cdot \delta \cdot \cos \alpha} = \frac{10,0 \cdot 10^{-3} \cdot 4,0 \cdot (2 \cdot 3,0 + 2,0)}{4 \cdot 0,002 \cdot 0,4472} = 89,4 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\text{при } y = h; \quad \sigma_t = \frac{\gamma \cdot r \cdot h \cdot (H + h - h)}{\delta \cdot h \cdot \cos \alpha} = \frac{\gamma \cdot r \cdot H}{\delta \cdot \cos \alpha} = 134,2 \text{ МПа};$$

Определим, при каком значении y напряжение σ_t принимает максимальное значение. Для этого воспользуемся условием

$$\frac{d\sigma_t}{dy} = \frac{d}{dy} \left[\frac{\gamma \cdot r \cdot y \cdot (H + h - y)}{\delta \cdot h \cdot \cos \alpha} \right] = \frac{\gamma \cdot r}{\delta \cdot h \cdot \cos \alpha} \cdot (H + h - 2y) = 0.$$

Так как $\gamma \cdot r / (\delta \cdot h \cdot \cos \alpha) \neq 0$, то

$$H + h - 2y = 0.$$

Отсюда получим

$$y = (H + h) / 2 = 2,5 \text{ м}.$$

Это означает, что точки, где σ_t принимают максимальное значение, находятся за пределами конической части.

Для определения напряжений σ_m предварительно вычислим Q – вес нижней части резервуара с жидкостью, который равен

$$Q = \gamma \cdot V_k.$$

Здесь V_k - объём конической части резервуара, которая расположена ниже рассматриваемых точек. Тогда

$$Q = \gamma \cdot V_k = \gamma \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R_y^2 \cdot y = \frac{\gamma \cdot \pi}{3} \cdot \left(\frac{r \cdot y}{h}\right)^2 \cdot y = \frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma \cdot \pi \cdot r^2}{h^2} \cdot y^3 \quad (3.6)$$

Подставим (3.2) и (3.6) в (1.6) и в результате получим

$$\sigma_m = \frac{\gamma \cdot r \cdot y}{2 \cdot \delta \cdot h \cdot \cos \alpha} \left(H + h - \frac{2}{3}y\right) = \frac{\gamma \cdot r \cdot y}{6 \cdot \delta \cdot h \cdot \cos \alpha} [3(H + h) - 2y]. \quad (3.7)$$

Подставим в (3.7) исходные данные и тогда найдём:

$$\text{при } y = 0; \quad \sigma_m = 0;$$

$$\begin{aligned} \text{при } y = \frac{h}{2}: \sigma_m &= \frac{\gamma \cdot r \cdot (h/2)}{6 \cdot \delta \cdot h \cdot \cos\alpha} \left[3(H + h) - 2 \cdot \frac{h}{2} \right] = \frac{\gamma \cdot r}{12 \cdot \delta \cdot \cos\alpha} (3H + 2h) = \\ &= \frac{10,0 \cdot 10^{-3} \cdot 4,0}{12 \cdot 0,002 \cdot 0,4472} \cdot (3 \cdot 3,0 + 2 \cdot 2,0) = 48,5 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } y = h: \sigma_m &= \frac{\gamma \cdot r \cdot h}{6 \cdot \delta \cdot h \cdot \cos\alpha} [3(H + h) - 2 \cdot h] = \frac{\gamma \cdot r}{6 \cdot \delta \cdot \cos\alpha} (3H + h) = \\ &= 82,0 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Для определения координат y точек, где σ_m принимает максимальное значение, рассмотрим условие

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_m}{dy} = \frac{d}{dy} \left[\frac{\gamma \cdot r \cdot y}{6 \cdot \delta \cdot h \cdot \cos\alpha} \cdot [3 \cdot (H + h) - 2y] \right] = \frac{\gamma \cdot r}{6 \cdot \delta \cdot h \cdot \cos\alpha} \cdot \\ \cdot [3 \cdot (H + h) - 4y] = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Так как } (\gamma \cdot r)/(6 \cdot \delta \cdot h \cdot \cos\alpha) \neq 0,$$

то из зависимости $3 \cdot (H + h) - 4y = 0$ получим

$$y = \frac{3}{4} \cdot (H + h) = \frac{3}{4} \cdot (3,0 + 2,0) = 3,75 \text{ м}.$$

Это означает, что данные точки находятся за пределами конической части.

Проверим прочность в характерных точках ($y = h/2$ и $y = h$) с применением энергетической теории прочности. Условие прочности имеет вид [2]:

$$\sigma_i \leq R,$$

где R - расчётное сопротивление, σ_i - приведённое напряжение.

Для тонкостенных резервуаров приведённое напряжение, вычисленное по энергетической теории, запишется в виде

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_m^2 - \sigma_m \cdot \sigma_t + \sigma_t^2}. \quad (3.8)$$

Тогда для точек с координатой $y = h/2$ получим

$$\sigma_i = \sqrt{48,5^2 - 48,5 \cdot 89,4 + 89,4^2} = 77,5 \text{ МПа} < R = 200 \text{ МПа}$$

и, следовательно, условие прочности выполняется;

для точек с координатой $y = h$

$$\sigma_i = \sqrt{82,0^2 - 82,0 \cdot 134,2 + 134,2^2} = 117,1 \text{ МПа} < R = 200 \text{ МПа}.$$

Таким образом, в рассматриваемых точках условие прочности также выполняется.

3.2. Расчёт цилиндрической части [$h \leq y \leq (H + h)$]

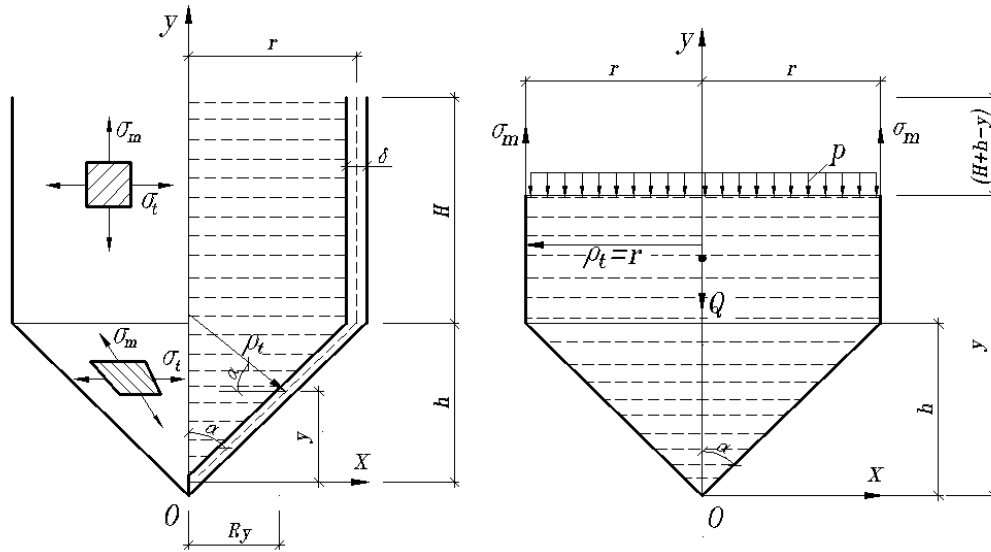


Рис. 3.2 – Расчётная схема цилиндрической части резервуара

Геометрические характеристики для цилиндрической части равны:

$$\rho_t = r, \rho_m = \infty, R_y = r, \cos \alpha = 1, \delta = const.$$

Из уравнения (1.4) определим

$$\sigma_t = \frac{p \cdot \rho_t}{\delta}$$

При гидростатическом давлении $p = \gamma \cdot (H + h - y)$ напряжение σ_t будет равно

$$\sigma_t = \frac{\gamma \cdot r \cdot (H + h - y)}{\delta} \quad (3.9)$$

Подставляя исходные данные, найдём:

при $y = h$:

$$\sigma_t = \frac{\gamma \cdot r \cdot H}{\delta} = \frac{10,0 \cdot 10^{-3} \cdot 3,0 \cdot 4,0}{0,002} = 60,0 \text{ МПа};$$

при $y = H + h$: $\sigma_t = 0$.

Для определения σ_m выразим вес Q части резервуара и жидкости ниже рассматриваемого окружного сечения через известные параметры

$$Q = \gamma \cdot (V_y + V_k) \quad (3.10)$$

где V_y и V_k – объёмы жидкости в цилиндрической и конической частях резервуара ниже рассматриваемого сечения с координатой y :

$$V_y = \pi \cdot r^2 \cdot (y - h), \quad V_k = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Тогда

$$Q = \gamma \cdot \left[\pi \cdot r^2 \cdot (y - h) + \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h \right] = \pi \cdot r^2 \cdot \gamma \cdot \left(y - \frac{2}{3} \cdot h \right) =$$

$$= \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \gamma}{3} (3y - 2h). \quad (3.11)$$

Подставляя (3.11) в уравнение (1.6), получим

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{\gamma \cdot r}{2 \cdot \delta} \cdot \left(H + h - y + y - \frac{2}{3}h \right) = \frac{\gamma \cdot r}{2 \cdot \delta} \cdot \left(H + \frac{h}{3} \right) = \frac{\gamma \cdot r}{6 \cdot \delta} \cdot (3H + h) = \\ &= \frac{10,0 \cdot 10^{-3} \cdot 4,0}{6 \cdot 0,002} \cdot [3 \cdot 3,0 + 2,0] = 36,7 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Проверим условие прочности точек цилиндрической части с координатой $y = h$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_m^2 - \sigma_m \cdot \sigma_t + \sigma_t^2} = \sqrt{36,7^2 - 36,7 \cdot 60,0 + 60,0^2} = 52,4 \text{ МПа} \leq R = 200 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

По полученным результатам построим эпюры σ_m и σ_t . Справа от оси симметрии $O - O$ изобразим напряжения σ_m , а слева σ_t .

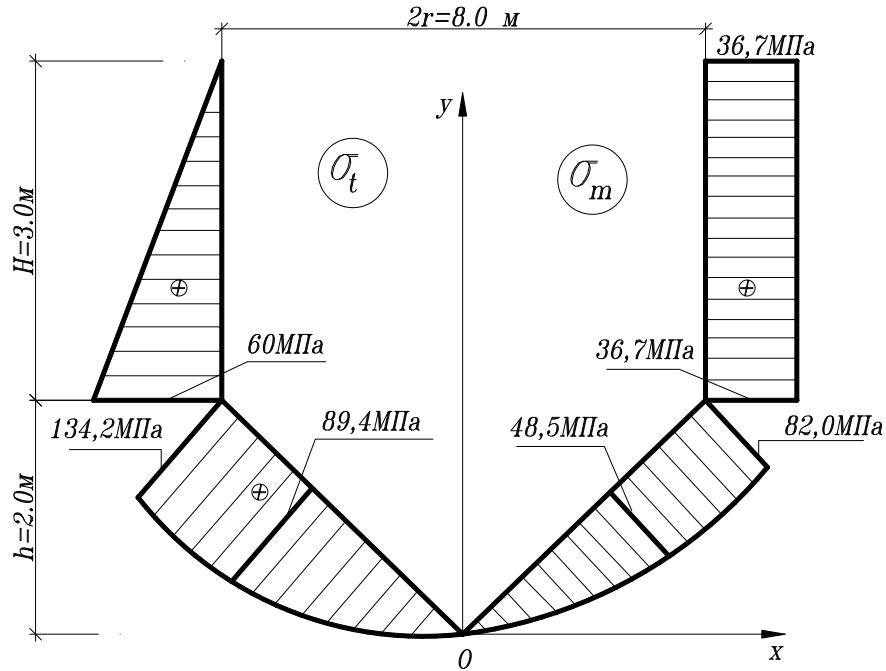


Рис. 3.3 – Эпюры напряжений

4. Пример расчёта цилиндрического резервуара со сферическим дном

На рис. 4.1 приведена расчетная схема резервуара. Начало координат рекомендуется установить в нижней точке срединной поверхности, y – координата точек срединной поверхности.

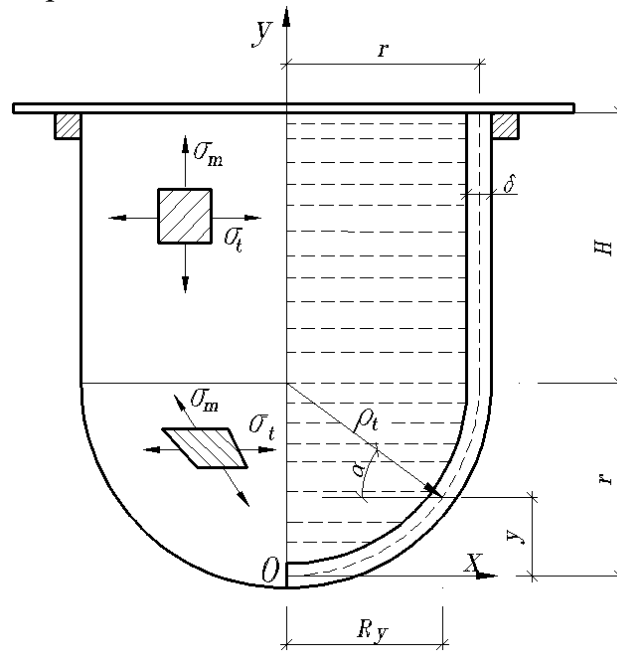


Рис. 4.1 – Расчетная схема резервуара

Исходные данные: $r = 3.0$ м, $H = 4.0$ м, $h = r = 3.0$ м, $\delta = 0.001$ м, $\gamma = 12.0 \cdot 10^{-3}$ МН/м³, общее для всех вариантов расчётное сопротивление $R = 200$ Мпа.

4.1. Расчёт сферической части $0 \leq y \leq h$

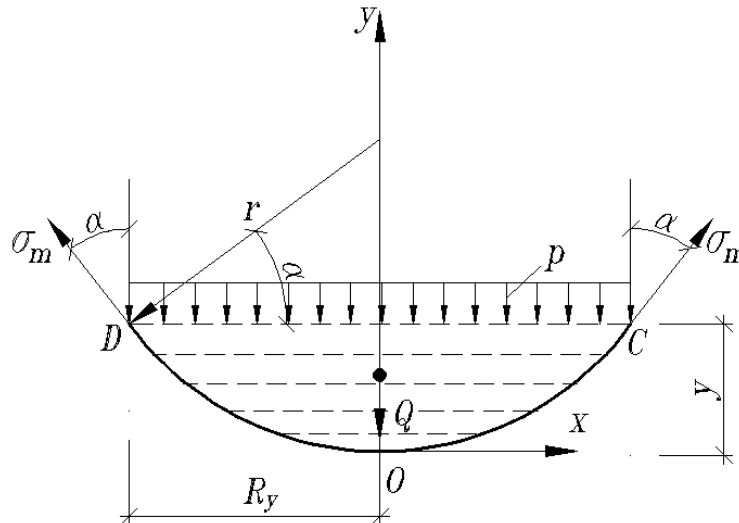


Рис. 4.2 – Расчётная схема сферической части резервуара

Для сферической части резервуара $\rho_t = \rho_m = r$.

Из рис. 4.2 найдём:

$$R_y = r \cdot \cos \alpha, \quad (4.1)$$

$$r - y = r \cdot \sin \alpha, \quad (4.2)$$

$$y = r - r \cdot \sin \alpha. \quad (4.3)$$

Уравнение (1.4) можно представить в виде

$$\frac{\sigma_m}{r} + \frac{\sigma_t}{r} = \frac{p}{\delta} \quad (4.4)$$

Отсюда получим

$$\sigma_t = \frac{p \cdot r}{\delta} - \sigma_m, \quad (4.5)$$

где

$$p = \gamma \cdot (r + H - y) = \gamma \cdot (H + r \cdot \sin \alpha). \quad (4.6)$$

Сначала найдём напряжение σ_m по формуле (1.6), подставив в неё p из (4.6) и $Q = \gamma \cdot V$, где V – объём жидкости ниже рассматриваемого сечения DC, равный

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi \cdot y^2 \cdot (3r - y) = \frac{\pi \cdot r^3}{3} \cdot (1 - \sin \alpha)^2 \cdot (2 + \sin \alpha) = \\ &= \frac{\pi \cdot r^3}{3} \cdot (2 - 3 \cdot \sin \alpha + \sin^3 \alpha) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{\gamma \cdot (H + r \cdot \sin \alpha) \cdot r \cdot \cos \alpha}{2 \cdot \delta \cdot \cos \alpha} + \frac{\gamma \cdot \pi \cdot r^3 \cdot (2 - 3 \cdot \sin \alpha + \sin^3 \alpha)}{6 \cdot \pi \cdot r \cdot \cos \alpha \cdot \delta \cdot \cos \alpha} = \\ &= \frac{\gamma \cdot H \cdot r}{2 \cdot \delta} + \frac{\gamma \cdot r^2}{3 \cdot \delta} \cdot \frac{(1 - \sin^3 \alpha)}{\cos^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Подставляя в (4.5) значение p из (4.6) и σ_m из (4.8), получим окончательное выражение для σ_t

$$\sigma_t = \frac{\gamma \cdot r^2}{3 \cdot \delta} \cdot \left(3 \cdot \sin \alpha - \frac{1 - \sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) + \frac{\gamma \cdot r \cdot H}{2 \cdot \delta}. \quad (4.9)$$

Необходимо отметить, что в формулах (4.8) и (4.9) при $\alpha = 90^\circ$ возникает неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Для её раскрытия воспользуемся правилом Лопиталья

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 90^\circ} \frac{1 - \sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 90^\circ} \frac{\frac{d}{d\alpha} (1 - \sin^3 \alpha)}{\frac{d}{d\alpha} (\cos^2 \alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow 90^\circ} \frac{-3 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \cdot \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha)} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 90^\circ} \left(\frac{3}{2} \cdot \sin \alpha \right) = \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Вычислим значение σ_m при различных значениях α .

При $\alpha = 90^\circ$ ($y = 0$)

$$\sigma_m = \frac{\gamma \cdot r^2}{3 \cdot \delta} \cdot \frac{3}{2} + \frac{\gamma \cdot r \cdot H}{2 \cdot \delta} = \frac{\gamma \cdot r}{2 \cdot \delta} \cdot (r + H) = \frac{12,0 \cdot 10^{-3} \cdot 3,0}{2 \cdot 0,001} \cdot (3,0 + 4,0) = 126,0 \text{ Мпа.}$$

При $\alpha = \pi/4 = 45^\circ$

$$\sigma_m = \frac{\gamma \cdot r^2}{3 \cdot \delta} \cdot \frac{1 - \sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\gamma \cdot r \cdot H}{2 \cdot \delta} = \frac{12,0 \cdot 10^{-3} \cdot 3,0^2}{3 \cdot 0,001} \cdot \left(\frac{1 - \sin^3 45^\circ}{\cos^2 45^\circ} \right) + \frac{12,0 \cdot 10^{-3} \cdot 3,0 \cdot 4,0}{2 \cdot 0,001} = 118,5 \text{ МПа.}$$

При $\alpha = 0^\circ$ ($y = r$)

$$\sigma_m = \frac{\gamma \cdot r^2}{3 \cdot \delta} \cdot \frac{1 - 0}{1} + \frac{\gamma \cdot r \cdot H}{2 \cdot \delta} = \frac{12,0 \cdot 10^{-3} \cdot 3,0^2}{3 \cdot 0,001} + \frac{12,0 \cdot 10^{-3} \cdot 3,0 \cdot 4,0}{2 \cdot 0,001} = 108,0 \text{ МПа.}$$

Вычислим окружные напряжения σ_t при различных значениях α .

При $\alpha = 90^\circ$ ($y = 0$)

$$\sigma_t = \frac{\gamma \cdot r^2}{3 \cdot \delta} \cdot \frac{3}{2} + \frac{\gamma \cdot r \cdot H}{2 \cdot \delta} = \frac{\gamma \cdot r}{2 \cdot \delta} \cdot (r + H) = \frac{12,0 \cdot 10^{-3} \cdot 3,0}{2 \cdot 0,001} \cdot (3,0 + 4,0) = 126,0 \text{ МПа.}$$

При $\alpha = \pi/4 = 45^\circ$

$$\sigma_t = \frac{\gamma \cdot r^2}{3 \cdot \delta} \left(3 \cdot \sin \alpha - \frac{1 - \sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) + \frac{\gamma \cdot r \cdot H}{2 \cdot \delta} = \frac{12,0 \cdot 10^{-3} \cdot 3,0^2}{3 \cdot 0,001} \cdot \left(3 \cdot \sin 45^\circ - \frac{1 - \sin^3 45^\circ}{\cos^2 45^\circ} \right) + \frac{12,0 \cdot 10^{-3} \cdot 3,0 \cdot 4,0}{2 \cdot 0,001} = 101,8 \text{ МПа.}$$

При $\alpha = 0^\circ$ ($y = r$)

$$\sigma_t = \frac{12,0 \cdot 10^{-3} \cdot 3,0^2}{3 \cdot 0,001} \cdot \left(3 \cdot \sin 0^\circ - \frac{1 - \sin^3 0^\circ}{\cos^2 0^\circ} \right) + \frac{12,0 \cdot 10^{-3} \cdot 3,0 \cdot 4,0}{2 \cdot 0,001} = -36 + 72 = 36 \text{ МПа.}$$

Напряжения σ_m и σ_t при изменении угла α от 90° до 0° изменяются монотонно и поэтому экстремальных значений внутри этого интервала не принимают.

4.2. Расчёт цилиндрической части $r \leq y \leq (r + H)$

Для цилиндрической части резервуара будем иметь

$$\rho_t = r, \rho_m = \infty, R_y = r, \cos \alpha = 1, \delta = 0,001 \text{ м.}$$

Из уравнения (1.4) получим

$$\sigma_t = \frac{\rho_t \cdot p}{\delta}.$$

При $p = \gamma \cdot (H + r - y)$ напряжение σ_t будет равно

$$\sigma_t = \frac{\gamma \cdot r \cdot (H + r - y)}{\delta}. \quad (4.11)$$

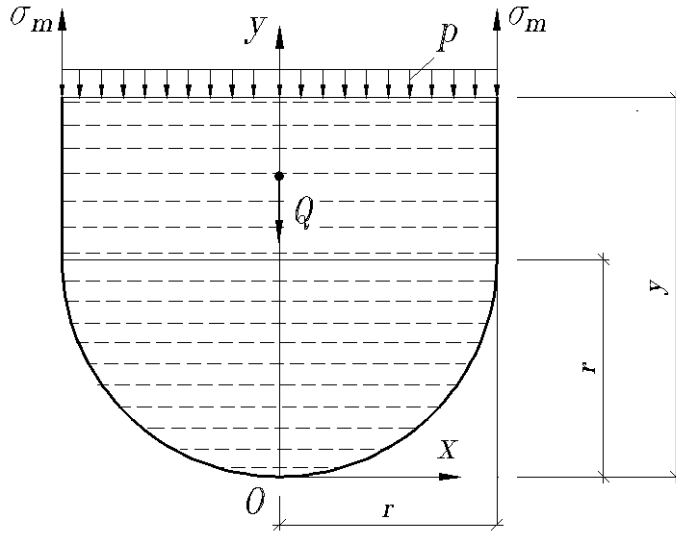


Рис. 4.3 – Расчётная схема цилиндрической части резервуара

Подставляя исходные данные, найдём:

$$\text{при } y = r \quad \sigma_t = \frac{\gamma \cdot r \cdot H}{\delta} = \frac{12,0 \cdot 10^{-3} \cdot 3,0 \cdot 4,0}{0,001} = 144,0 \text{ МПа};$$

$$\text{при } y = H + r \quad \sigma_t = 0.$$

Для определения σ_m вычислим вес жидкости, которая находится ниже рассматриваемого сечения с координатой y

$$Q = \gamma \cdot V = \gamma \cdot \left[\pi \cdot r^2 (y - r) + \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \right] = \frac{\gamma \cdot \pi \cdot r^2}{3} \cdot (3 \cdot y - r). \quad (4.12)$$

Подставляя (4.12) в (1.6), получим

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{p \cdot r}{2 \cdot \delta} + \frac{Q}{2\pi \cdot r \cdot \delta} = \frac{\gamma \cdot (H + r - y) \cdot r}{2 \cdot \delta} + \frac{\gamma \cdot \pi \cdot r^2}{3 \cdot 2\pi \cdot r \cdot \delta} \cdot (3y - r) = \\ &= \frac{\gamma \cdot (H + r - y) \cdot r}{2 \cdot \delta} + \frac{\gamma \cdot r}{6 \cdot \delta} \cdot (3y - r) = \frac{\gamma \cdot r}{6 \cdot \delta} \cdot (3H + 2r) = \\ &= \frac{12,0 \cdot 10^{-3} \cdot 3,0}{6 \cdot 0,001} \cdot (3 \cdot 4,0 + 2 \cdot 3,0) = 108,0 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Проверим выполнение условия прочности в наиболее напряжённых точках цилиндрической части резервуара при $y = r$

$$\sigma_i = \sqrt{144,0^2 - 144,0 \cdot 108,0 + 108,0^2} = 129,8 \text{ МПа} < R = 200 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

Эпюры σ_t и σ_m для цилиндрического резервуара со сферическим дном представлены на рис. 4.4.

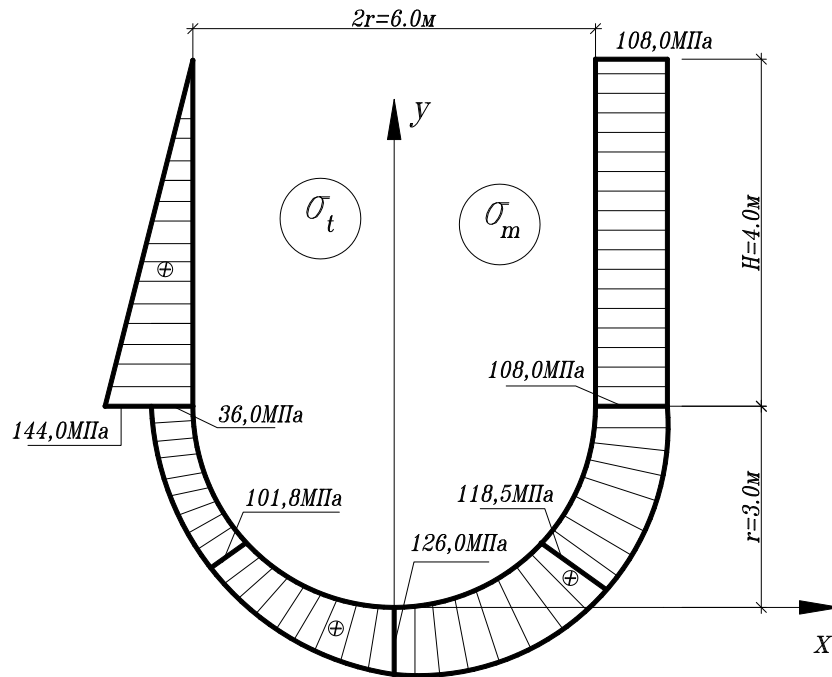


Рис. 4.4 – Эпюры напряжений

5. Описание программы для ПЭВМ

Алгоритм расчёта тонкостенных резервуаров, заполненных жидкостью, был реализован в виде программы **RESERV** на алгоритмическом языке Паскаль. В качестве исходных данных используются:

- ✓ для первой расчётной схемы значения величин H, h, r, R, δ и γ ;
- ✓ для второй расчётной схемы H, r, R, δ и γ .

Программа позволяет получить для каждой расчётной схемы значения меридиональных σ_m и окружных σ_t напряжений в характерных точках стенок цилиндрической, конической и сферической частей резервуара. В этих же точках проверяется условие прочности с применением энергетической теории. Ввод данных производится в диалоговом режиме.

6. Контрольные вопросы

1. Какие конструкции называют оболочками?
2. Какие внутренние силовые факторы действуют в сечениях выделенного элемента оболочки в общем случае?
3. Какие конструкции называют тонкостенными резервуарами?
4. Какие сечения называются меридиональными, а какие окружными?
5. Что называется срединной поверхностью?
6. Какие напряжения называются меридиональными, а какие окружными?
7. В чём особенность безмоментной теории расчёта тонкостенных резервуаров?
8. Как записывается уравнение Лапласа?
9. По какой формуле определяются меридиональные напряжения?
10. Каков порядок определения максимальных значений меридиональных и окружных напряжений в конической части резервуара?
11. Что называется приведённым напряжением?
12. Как определяется приведённое напряжение по энергетической теории?
13. Какую форму могут иметь днища резервуаров?

Библиографический список

1. Смирнов А.Ф., Александров А.В. и др. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1978. – 595 с.
2. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1995. – 560 с.
3. Львин Я.Б. Основы теории оболочек. Конспект лекций – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1966.-120с.

Оглавление

Введение	4
1. Основные положения теории	6
2. Исходные данные и задание к расчётной работе	10
3. Пример расчёта цилиндрического резервуара с коническим дном	12
3.1. Расчёт конической части ($0 \leq y \leq h$)	12
3.2. Расчёт цилиндрической части ($h \leq y \leq H + h$)	15
4. Пример расчёта цилиндрического резервуара со сферическим дном	17
4.1. Расчёт сферической части ($0 \leq y \leq h$)	17
4.2. Расчёт цилиндрической части ($r \leq y \leq r + H$)	19
5. Описание программы для ПЭВМ	21
6. Контрольные вопросы	22
Библиографический список	22

Расчёт тонкостенных резервуаров

Методические указания
к расчётно – графической работе
по курсам «Сопротивление материалов»,
«Теория расчета пластин и оболочек»
для студентов всех специальностей
дневной формы обучения

Составители – ст. преп. Ринат Абдуллаевич Мухтаров;
к.ф.-м.н., доц. Александр Васильевич Резунов.

Редактор Аграновская Н.Н.

Подписано в печать 01.02.2011. Формат 60x84 1/16. Уч.-изд. л. 2,0.
Усл.-печ. 2,1. Бумага писчая. Тираж 100 экз. Заказ №

Отпечатано: отдел оперативной полиграфии Воронежского государственного – архитектурно
строительного университета
394006, Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84