Пример расчёта на изгиб гибкой прямоугольной пластинки

Рассмотрим прямоугольную пластину при действии на нее равномерно распределенной нагрузки q (рис. 1). Вдоль всех кромок пластина опирается на абсолютно жесткие в своей плоскости диафрагмы и гибкие из нее. Это соответствует следующим граничным условиям: $w = 0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$, $N_x = 0$, $v = 0$ при $x = 0$, $x = a$.

Аналогично можно записать граничные условия для двух других кромок пластины при $y = 0$ и $y = b$.

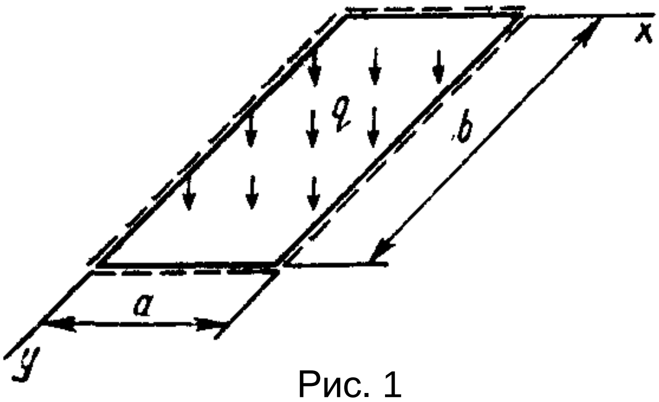

Рис. 1

Рассмотрим систему уравнений Кармана

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{E\delta}\nabla^4\Phi - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \\ &D\nabla^4 w - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = q. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

В (1)

$$N_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2};\quad N_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2};\quad S = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\text{, где } \Phi = \delta\varphi.$$

(см. лекцию №10).

Ищем решение уравнений (1) в виде

$$w = \sum_{m,\,n} f_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y; \qquad (2)$$

$$\Phi = \sum_{i,\,j} \varphi_{ij}\sin\frac{i\pi}{a}x\sin\frac{j\pi}{b}y, \qquad (3)$$

где f_{mn}, φ_{ij} — константы.

Нетрудно убедиться в том, что функции w, Φ удовлетворяют всем граничным условиям.

Для определения постоянных f_{mn}, φ_{ij} воспользуемся методом Бубнова — Галеркина, применение которого в данном случае сводится к следующему.

Подставим разложения (2), (3) в уравнения (1), после чего умножим первое из них на $\sin\frac{i\pi}{a}x\sin\frac{j\pi}{b}y$, а второе — на $\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$. Интегрируя каждое из полученных выражений по площади пластины и приравнивая, результаты к нулю, придем к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно констант f_{mn}, φ_{ij}.

Особенности такого способа получения решения уравнений (1) проиллюстрируем для случая, когда в разложениях (2), (3) удерживается только один член:

$$w \approx f\sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y;$$
$$\Phi \approx \varphi\sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y. \qquad (4)$$

После подстановки выражений (4) в уравнения (1) получим

$$X_1 = \frac{1}{E\delta}\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)^2\varphi\sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y -$$
$$-\frac{\pi^4}{a^2b^2}f^2\left(\cos^2\frac{\pi}{a}x\cos^2\frac{\pi}{b}y-\sin^2\frac{\pi}{a}x\sin^2\frac{\pi}{b}y\right);$$
$$X_2 = D\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)^2 f\sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y -$$
$$-2\frac{\pi^4}{a^2b^2}f\varphi\left(\sin^2\frac{\pi}{a}x\sin^2\frac{\pi}{b}y-\cos^2\frac{\pi}{a}x\cos^2\frac{\pi}{b}y\right)-q.$$

Здесь X_1 и X_2 левые части уравнений (1) (во втором уравнении q перенесено в левую часть).

Используя метод Бубнова — Галеркина, умножим X_1, X_2 на $\sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{b}y$ и проинтегрируем по площади пластины:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)^2\varphi+\frac{16\pi^2E\delta}{3a^2b^2}f^2=0;\\&D\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)^2 f-\frac{32\pi^2}{3a^2b^2}f\varphi=\frac{16}{\pi^2}q.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Система уравнений (5) сводится к одному уравнению относительно амплитуды прогиба f. Например, при $a/b = 1$ имеем

$$\frac{f}{\delta}+\frac{128(1-\mu^2)}{3\pi^4}\frac{f^3}{\delta^3}=B, \qquad (6)$$

где $B=\frac{4qa^4}{\pi^6D\delta}$.

Уравнение (6) позволяет провести качественный анализ решения задачи об изгибе гибкой квадратной пластины. Для получения более точных результатов необходимо удерживать в разложениях (2), (3) большее число членов.

Для сравнения на рис. 2 показаны графики зависимости $\frac{f}{\delta} \sim B$, отвечающие квадратной в плане жесткой (кривая *1*) и гибкой (кривая 2) пластине при $\mu = 0{,}3$.

Погрешность, равная 10%, в решении для жесткой пластины достигается в этом случае уже при $f/\delta \approx 0{,}5$.

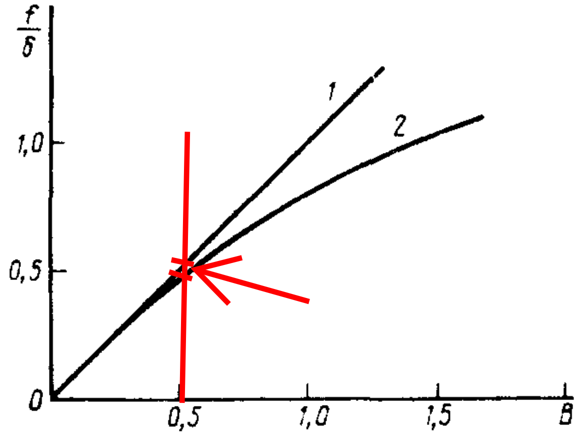

Рис. 2