

ПОНЯТИЕ О РАСЧЕТЕ ГИБКИХ ПЛАСТИНОК

Тонкие пластинки, имеющие прогибы более четверти своей толщины, называются гибкими. Для них гипотеза о недеформируемости срединной плоскости оказывается несправедливой, так как в ней появляются деформации растяжения, сжатия и сдвига. Кроме того, усилия срединной плоскости гибкой пластинки зависят от ее прогибов.

При больших прогибах точки срединной плоскости получают перемещения u_0 и v_0 вдоль осей x и y (рис. 1). Тогда формулы (1.6) принимают вид

$$u = u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Точно так же в формулах (1.7) появляются деформации точек срединной плоскости ϵ_x^0 , ϵ_y^0 и γ_{xy}^0 :

$$\epsilon_x = \epsilon_x^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

$$\epsilon_y = \epsilon_y^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

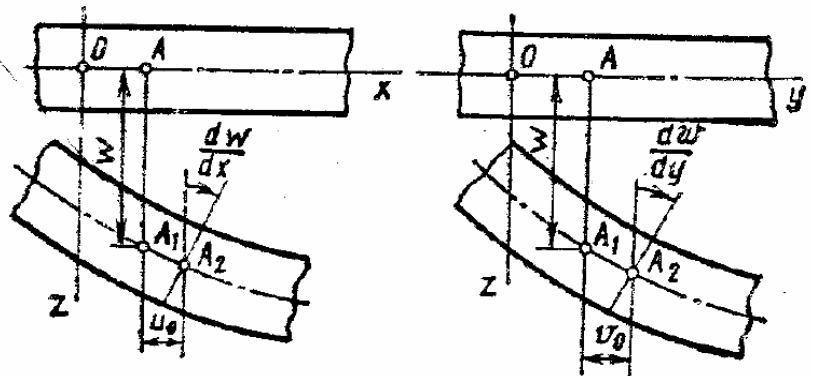


Рис. 1

Эти формулы усложняются еще и тем, что деформации точек срединной плоскости зависят от прогибов нелинейно:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \\ \epsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

так как в данном случае квадраты производных $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$ и $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$ имеют тот же порядок малости, что и производные $\frac{\partial u_0}{\partial x}$ и $\frac{\partial v_0}{\partial y}$.

Напряжения в гибкой пластинке приводятся не только к изгибающим и крутящим моментам и поперечным силам но и к нормальным и сдвигающим силам в срединной плоскости (рис. 2):

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right];$$

$$N_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right];$$

$$S_x = S_y = S = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

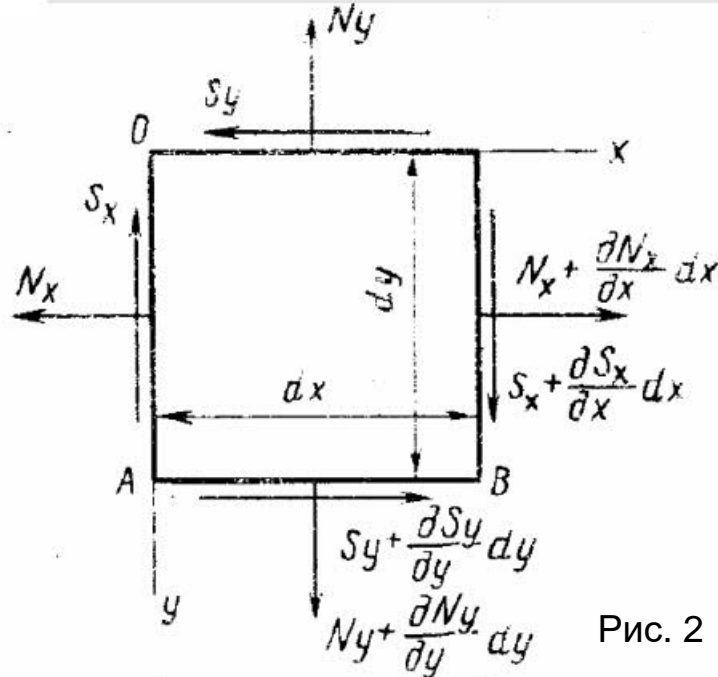


Рис. 2

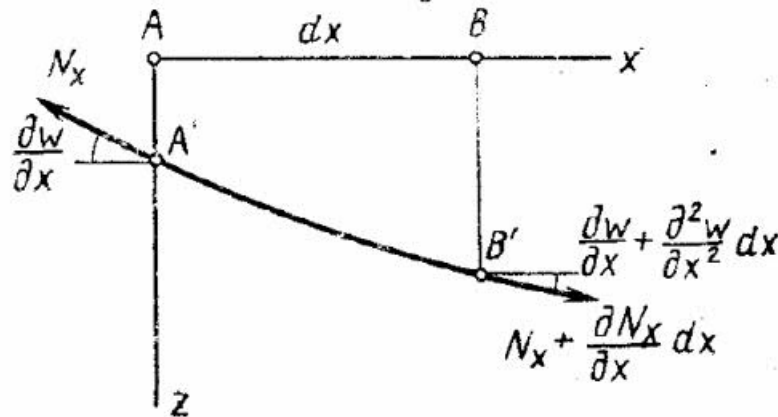


Рис. 3

Записанные формулы содержат неизвестные составляющие перемещений точек срединной плоскости u_0 и v_0 . Исключая эти перемещения, получаем уравнение неразрывности деформаций, связывающее усилия в срединной плоскости пластинки:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (N_x - \nu N_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (N_y - \nu N_x) - 2(1-\nu) \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} =$$

$$= Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \quad (a)$$

Составим уравнения равновесия бесконечно малого элемента срединной плоскости гибкой пластинки, находящейся как под действием поперечных сил (см. рис.2.1), так и под действием сил в ее срединной плоскости (рис. 2). Проекция сил на ось x дает

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) dy - N_x dy + \left(S_y + \frac{\partial S_y}{\partial y} dy\right) dx - S_y dx = 0,$$

откуда после упрощения и деления на $dx dy$ находим

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} = 0. \quad (б)$$

Аналогично из уравнения проекций на ось y получаем

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \quad (в)$$

При проецировании сил на ось z гибкую пластинку следует рассматривать в деформированном состоянии. На рис. 3 показано сечение плоскостью, параллельной xOz , бесконечно малого элемента срединной плоскости пластинки после искривления. В этой плоскости видны силы

$$N_x dy \quad \text{и} \quad \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) dy,$$

углы наклона которых относительно оси x соответственно равны

$$\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx.$$

При проектировании учтем, что косинус малого угла равен единице, а синус — самому углу, т. е. в данной плоскости

$$\sin\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \approx \frac{\partial w}{\partial x};$$

$$\sin\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx\right) \approx \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx.$$

Спроецируем нормальные силы в рассматриваемой плоскости на ось z :

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) dy \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx\right) - N_x dy \frac{\partial w}{\partial x}.$$

После упрощения и отбрасывания величин третьего порядка малости получим

$$\left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy. \quad (\Gamma)$$

Аналогично можно получить проекцию на ось z нормальных сил в плоскости yOz :

$$\left(N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy. \quad (\Delta)$$

Расположение касательных сил после деформации гибкой пластинки показано на рис. 4. На том же рисунке показаны углы, составляемые этими силами с координатной плоскостью xOy . Спроецируем эти силы на ось z :

$$\begin{aligned} & \left(S_x + \frac{\partial S_x}{\partial x} dx \right) dy \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \right) - S_x dy \frac{\partial w}{\partial y} + \\ & \left(S_y + \frac{\partial S_y}{\partial y} dy \right) dx \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \right) - S_y dx \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

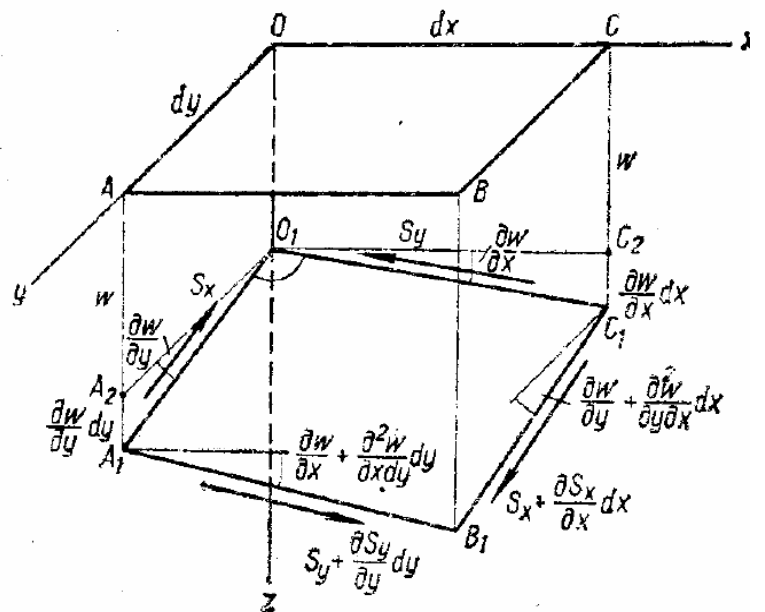


Рис.

После упрощения и отбрасывания величин третьего порядка малости с учетом закона парности касательных усилий ($S_x = S_y = S$) получим

$$\left(2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy. \quad (\epsilon)$$

На проекцию поперечных усилий искривление пластинки не влияет, поэтому берем ее в форме (2.2). Добавляя к этой зависимости проекции (г)—(е), разделенные на $dx dy$, после соответствующей группировки получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ & + \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial y} = -q. \quad (*) \end{aligned}$$

Выражения, стоящие в скобках, согласно соотношениям (б) и (в), равны нулю. Подставляя затем в (*) выражения поперечных сил, находим

$$D\nabla^2 \nabla^2 w = q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (ж)$$

Если ввести функцию Эри $\varphi(x, y)$ в форме

$$N_x = h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad N_y = h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad S = -h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (2)$$

то уравнения (ж) и (а) примут вид

$$\left. \begin{aligned} D\nabla^2 \nabla^2 w - hL(w, \varphi) &= q; \\ (\nabla^2 \nabla^2 \varphi)/E + 0,5L(w, \varphi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь введен оператор

$$L(w, \varphi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

При этом оператор $L(w, \varphi)$ получается из оператора $L(w, \varphi)$ заменой функции φ на функцию w .

Система нелинейных уравнений (3), связывающая функцию напряжений в срединной плоскости пластинки и функцию прогибов, выведена немецким ученым Т. Карманом. Совместно с граничными условиями она представляет основную систему нелинейных дифференциальных уравнений теории гибких пластинок. Решение этой системы в общем виде не получено. В настоящее время с помощью теории гибких пластинок получен ряд частных решений для равномерно распределенной поперечной нагрузки, а также для пластинок, теряющих устойчивость при сжатии и сдвиге в их срединной плоскости.

В случае жесткой пластинки, когда прогибы малы по сравнению с ее толщиной, необходимо принять функцию $\varphi = 0$. Тогда система (3) сводится к уравнению (2.5).