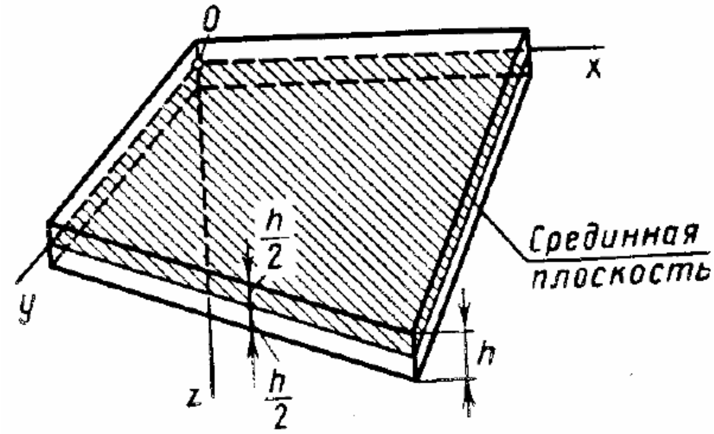
Теория изгиба пластин

Плитой (пластинкой) называется призматической или цилиндрической тело, высота которого h, называемая толщиной, мала по сравнению с размерами в плане. Плоскость, делящая пластинку пополам по толщине, называется срединной плоскостью. Линия пересечения срединной плоскости с боковой поверхностью называется контуром пластинки.



Оси x и y декартовой прямоугольной системы координат расположим в срединной плоскости, а ось z направим вертикально вниз. Перемещения w точек пластинки в направлении оси z называются прогибом пластинки.

Плиты в настоящее время находят широкой применение в различных областях техники, строительстве, авиации, судостроении, машиностроение и т. д. Это объясняется тем, что присущие тонкостенным конструкциям лёгкость и рациональность форм сочетаются с их высокой несущей способностью, экономичностью и хорошей технологичностью. В строительстве плиты используются в виде настилов, панелей, железобетонных плит покрытия, плит для фундаментов, элементов пролетных строений мостов и т. д.

В зависимости от отношения толщины плиты h к характерному размеру в плане a различают:

мембраны – $\frac{h}{a} \le \frac{1}{80}$,

тонкие плиты – $\frac{1}{80} \le \frac{h}{a} \le \frac{1}{5}$,

толстые плиты – $\frac{h}{a} > \frac{1}{5}$.

Тонкие плиты в свою очередь делятся на жесткие при $\frac{w}{h} \le \frac{1}{4}$ и гибкие при $\frac{w}{h} > \frac{1}{4}$.

Разумеется, указанные границы являются ориентировочными.

Толстые плиты рассчитываются по общим уравнениям пространственной задачи теории упругости и здесь не рассматриваются.

Расчет на изгиб тонких жестких пластин

Итак, будем считать, что $\frac{1}{80} \le \frac{h}{a} \le \frac{1}{5}$, а величина прогибов составляет не более h/4. Тонкие жесткие пластины рассчитываются по технической теории, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява, представляющих собой обобщение на теорию расчета плит методов расчета балок в сопротивлении материалов.

1. Гипотеза прямых нормалей.

Любой прямолинейный элемент, нормальный к срединной плоскости, остается прямолинейным и нормальным к срединной поверхности после деформирования пластинки, и длина его не изменяется.

Эта гипотеза аналогична гипотезе плоских сечений в теории изгиба балок.

Так как прямые углы не меняются, то соответствующие углы сдвига должны быть равны нулю

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \tag{1}$$

Из того, что длина элемента, параллельного оси z, не меняется, следует

$$\varepsilon_z = 0. \tag{2}$$

2. Гипотеза о недеформируемости срединной плоскости.

В срединной плоскости отсутствуют деформации растяжения, сжатия и сдвига.

Отсюда следует, что перемещения точек нейтральной плоскости по осям x и y равны нулю.

$$u_0 = v_0 = 0. \tag{3}$$

3. Гипотеза об отсутствии давления между слоями пластинки, параллельными срединной плоскости.

В соответствии с этой гипотезой напряжением σ_z можно пренебречь по сравнению с напряжениями σ_x и σ_y. Аналогичная гипотеза использовалась в теории изгиба балок.

Перемещения и деформации в пластинке.

Из первой гипотезы получим

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad w = w(x, y). \tag{4}$$

Из (1) имеем

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \text{и} \quad u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y); \\ &\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \text{и} \quad v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y). \end{aligned} \tag{5}$$

По второй гипотезе при z=0 $u_0 = v_0 = 0$, что с учетом (5) даёт

$$u(x,y,z) = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v(x,y,z) = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{6}$$

Из соотношений Коши найдем деформации

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_z = 0, \\ &\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Напряжения в пластинке

Из закона Гука в форме Ламе найдем напряжения

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad \lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)\cdot(1-2\cdot\nu)}, \quad G = \frac{E}{2\cdot(1+\nu)},$$

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x = \lambda\theta + 2G\varepsilon_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ &\sigma_y = \lambda\theta + 2G\varepsilon_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ &\sigma_z = 0, \\ &\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = -\frac{E \cdot z}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ &\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = 0, \\ &\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

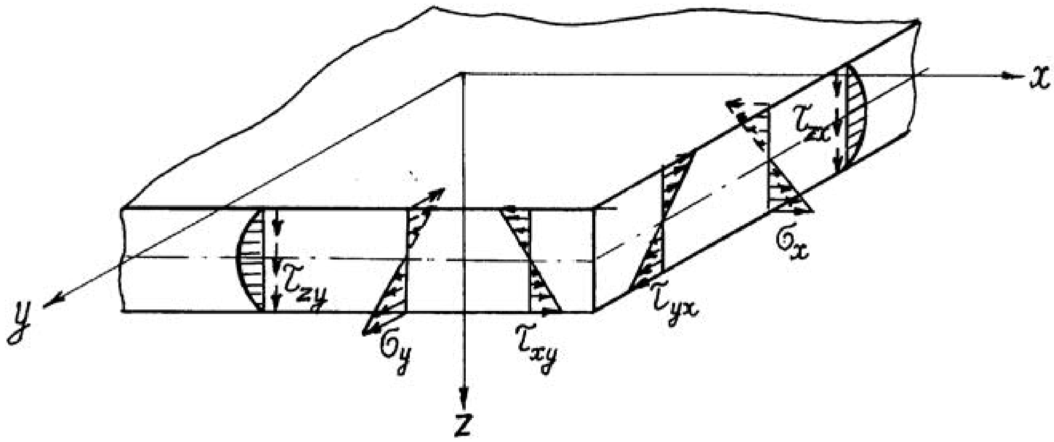
При использовании двух последних соотношений $\tau_{xz} = 0, \ \tau_{yz} = 0$ не будут выполняться дифференциальные уравнения равновесия. Это являются следствием приближенности исходных гипотез.

Чтобы преодолеть данное противоречие, напряжения τ_{xz} и τ_{yz} находят непосредственно из дифференциальных уравнений равновесия. Опуская промежуточные выкладки, получим

$$\left.\begin{aligned} &\tau_{xz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2 w\right), \\ &\tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\nabla^2 w\right). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

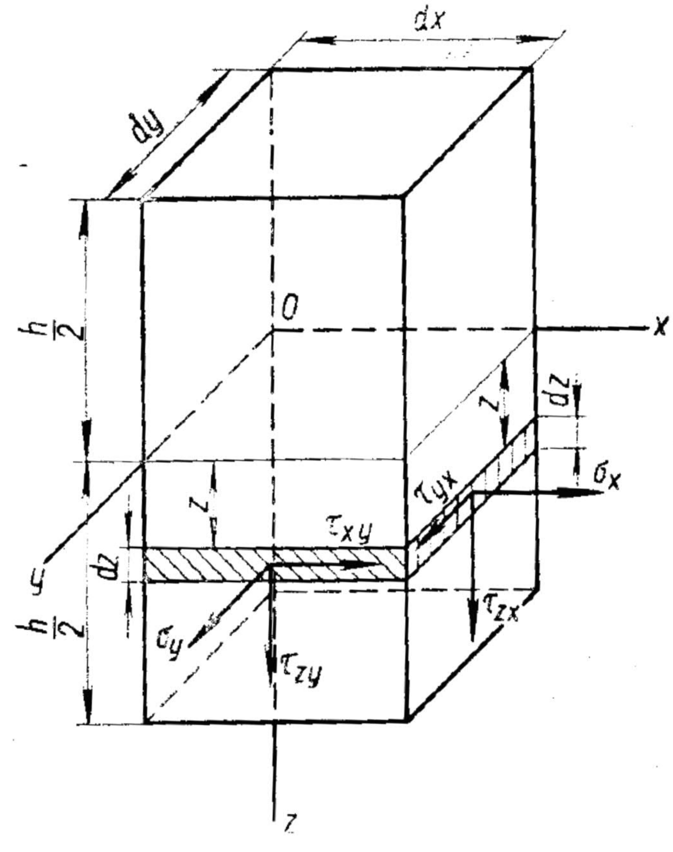
Здесь $\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

Таким образом, все неизвестные теории упругости – перемещения, деформации и напряжения выражаются через прогиб w. Поэтому функцию $w(x,y)$ в теории расчета плит называют определяющей. Приведем эпюры напряжений



Внутренние усилия в плите

Рассмотрим бесконечно малый элемент пластинки, вырезанный из неё сечениями, перпендикулярными срединной плоскости.



На рисунке показаны напряжения в точках слоя толщиной dz. Найдем продольную силу N_x, действующую на грани, перпендикулярной оси x. Для заштрихованной полоски площадью $dy \cdot dz$ получим

$$dN_x = \sigma_x dydz.$$

В теории изгиба плит принято рассматривать погонные усилия, приходящиеся на единицу ширины рассматриваемого сечения. Для этого разделим dN_x на dy, получим $dN_x = \sigma_x dz$, и после интегрирования по переменной z найдём окончательно

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int_{-h/2}^{h/2} z \cdot dz =$$

$$= -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot \frac{1}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(-\frac{h}{2}\right)^2\right] = 0.$$

Аналогично найдем $N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = 0.$

Поперечные силы

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz = -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w,$$

где $D = \dfrac{E \cdot h^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$ – цилиндрическая жёсткость.

Изгибающие моменты

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$$

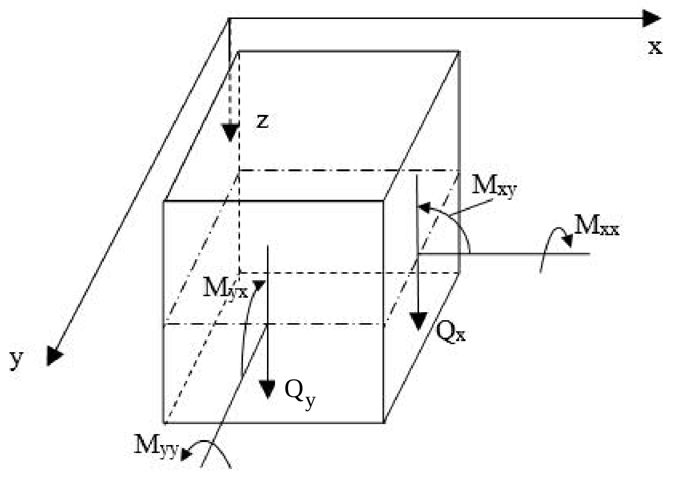
Крутящие моменты

$$M_{xx} = M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -D\left(1-\nu\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Используются также следующие обозначения:

$$M_{xy} \equiv M_x, \quad M_{yx} \equiv M_y, \quad M_{xx} = M_{yy} \equiv H.$$

Ниже показаны положительные направления силовых факторов



Напомним, что индексы при усилиях соответствуют осям, перпендикулярным к сечению, на котором действуют эти усилия. Например, Q_x – это погонная поперечная сила в сечении, перпендикулярном оси x. Второй индекс у изгибающих и крутящих моментов указывает ось, вокруг которой данный момент стремиться вращать рассматриваемый элемент. Например, M_{xy} – это изгибающий момент в сечении, перпендикулярном оси x, вызывающий вращение вокруг оси y.