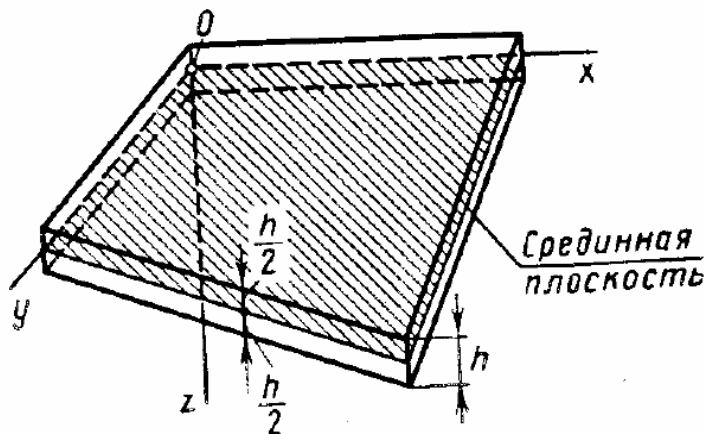


Теория изгиба пластин

Плитой (пластинкой) называется призматической или цилиндрической тело, высота которого h , называемая толщиной, мала по сравнению с размерами в плане. Плоскость, делящая пластинку пополам по толщине, называется срединной плоскостью. Линия пересечения срединной плоскости с боковой поверхностью называется контуром пластинки.



Оси x и y декартовой прямоугольной системы координат расположим в срединной плоскости, а ось z направим вертикально вниз. Перемещения w точек пластинки в направлении оси z называются прогибом пластинки.

Плиты в настоящее время находят широкой применение в различных областях техники, строительстве, авиации, судостроении, машиностроение и т. д. Это объясняется тем, что присущие тонкостенным конструкциям лёгкость и рациональность форм сочетаются с их высокой несущей способностью, экономичностью и хорошей технологичностью. В строительстве плиты используются в виде настилов, панелей, железобетонных плит покрытия, плит для фундаментов, элементов пролетных строений мостов и т. д.

В зависимости от отношения толщины плиты h к характерному размеру в плане a различают:

$$\text{мембраны} - \frac{h}{a} \leq \frac{1}{80},$$

$$\text{тонкие плиты} - \frac{1}{80} \leq \frac{h}{a} \leq \frac{1}{5},$$

$$\text{толстые плиты} - \frac{h}{a} > \frac{1}{5}.$$

Тонкие плиты в свою очередь делятся на жесткие при $\frac{w}{h} \leq \frac{1}{4}$ и гибкие при

$$\frac{w}{h} > \frac{1}{4}.$$

Разумеется, указанные границы являются ориентировочными.

Толстые плиты рассчитываются по общим уравнениям пространственной задачи теории упругости и здесь не рассматриваются.

Расчет на изгиб тонких жестких пластин

Итак, будем считать, что $\frac{1}{80} \leq \frac{h}{a} \leq \frac{1}{5}$, а величина прогибов составляет не более

$h/4$. Тонкие жесткие пластины рассчитываются по технической теории, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява, представляющих собой обобщение на теорию расчета плит методов расчета балок в сопротивлении материалов.

1. Гипотеза прямых нормалей.

Любой прямолинейный элемент, нормальный к срединной плоскости, остается прямолинейным к срединной поверхности после деформирования пластинки, и длина его не изменяется.

Эта гипотеза аналогична гипотезе плоских сечений в теории изгиба балок.

Так как прямые углы не меняются, то соответствующие углы сдвига должны быть равны нулю

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \quad (1)$$

Из того, что длина элемента, параллельного оси z , не меняется, следует

$$\varepsilon_z = 0. \quad (2)$$

2. Гипотеза о недеформируемости срединной плоскости.

В срединной плоскости отсутствуют деформации растяжения, сжатия и сдвига.

Отсюда следует, что перемещения точек нейтральной плоскости по осям x и y равны нулю.

$$u_0 = v_0 = 0. \quad (3)$$

3. Гипотеза об отсутствии давления между слоями пластинки, параллельными срединной плоскости.

В соответствии с этой гипотезой напряжением σ_z можно пренебречь по сравнению с напряжениями σ_x и σ_y . Аналогичная гипотеза использовалась в теории изгиба балок.

Перемещения и деформации в пластинке.

Из первой гипотезы получим

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad w = w(x, y). \quad (4)$$

Из (1) имеем

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \text{и} \quad u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y); \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \text{и} \quad v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y). \end{aligned} \quad (5)$$

По второй гипотезе при $z=0$ $u_0 = v_0 = 0$, что с учетом (5) даёт

$$u(x, y, z) = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v(x, y, z) = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (6)$$

Из соотношений Коши найдем деформации

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_z = 0, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Напряжения в пластинке

Из закона Гука в форме Ламе найдем напряжения

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad \lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}, \quad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}, \\ \sigma_x &= \lambda \theta + 2G \varepsilon_x = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= \lambda \theta + 2G \varepsilon_y = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_z &= 0, \\ \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} = -\frac{E \cdot z}{(1 + \nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \tau_{xz} &= G \cdot \gamma_{xz} = 0, \\ \tau_{yz} &= G \cdot \gamma_{yz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

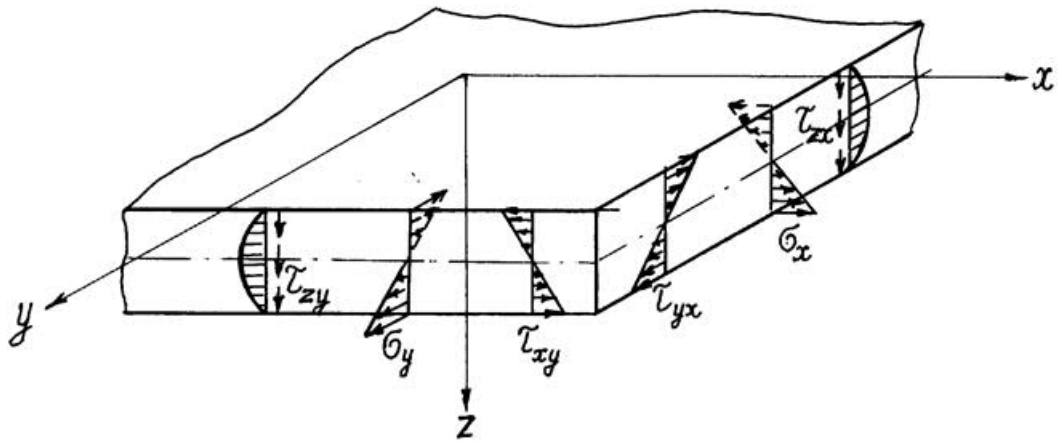
При использовании двух последних соотношений $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$ не будут выполняться дифференциальные уравнения равновесия. Это является следствием приближенности исходных гипотез.

Чтобы преодолеть данное противоречие, напряжения τ_{xz} и τ_{yz} находят непосредственно из дифференциальных уравнений равновесия. Опуская промежуточные выкладки, получим

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= -\frac{E}{2(1 - \nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w), \\ \tau_{yz} &= -\frac{E}{2(1 - \nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

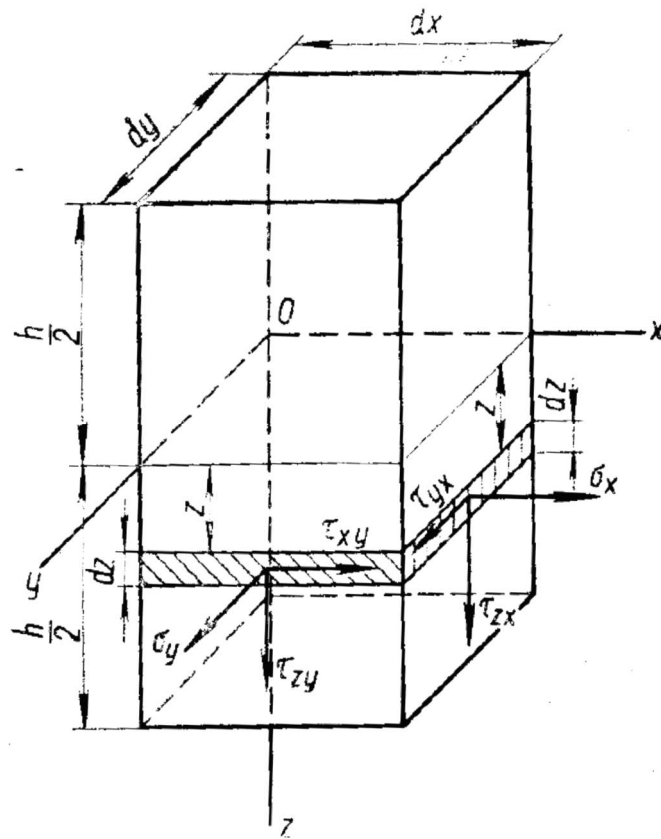
$$\text{Здесь } \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Таким образом, все неизвестные теории упругости – перемещения, деформации и напряжения выражаются через прогиб w . Поэтому функцию $w(x, y)$ в теории расчета плит называют определяющей. Приведем эпюры напряжений



Внутренние усилия в плите

Рассмотрим бесконечно малый элемент пластинки, вырезанный из неё сечениями, перпендикулярными срединной плоскости.



На рисунке показаны напряжения в точках слоя толщиной dz . Найдём продольную силу N_x , действующую на грани, перпендикулярной оси x . Для заштрихованной полоски площадью $dy \cdot dz$ получим

$$dN_x = \sigma_x dy dz .$$

В теории изгиба плит принято рассматривать погонные усилия, приходящиеся на единицу ширины рассматриваемого сечения. Для этого разделим dN_x на dy , получим $dN_x = \sigma_x dz$, и после интегрирования по переменной z найдём окончательно

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot dz =$$

$$= -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{1}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - \left(-\frac{h}{2} \right)^2 \right] = 0.$$

Аналогично найдем $N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = 0.$

Поперечные силы

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w,$$

где $D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жёсткость.

Изгибающие моменты

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).$$

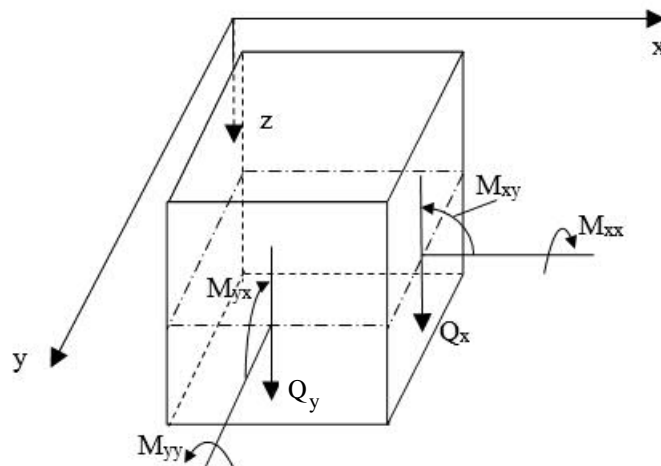
Крутящие моменты

$$M_{xx} = M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Используются также следующие обозначения:

$$M_{xy} \equiv M_x, \quad M_{yx} \equiv M_y, \quad M_{xx} = M_{yy} \equiv H.$$

Ниже показаны положительные направления силовых факторов



Напомним, что индексы при усилиях соответствуют осям, перпендикулярным к сечению, на котором действуют эти усилия. Например, Q_x – это погонная поперечная сила в сечении, перпендикулярном оси x . Второй индекс у изгибающих и крутящих моментов указывает ось, вокруг которой данный момент стремится вращать рассматриваемый элемент. Например, M_{xy} – это изгибающий момент в сечении, перпендикулярном оси x , вызывающий вращение вокруг оси y .