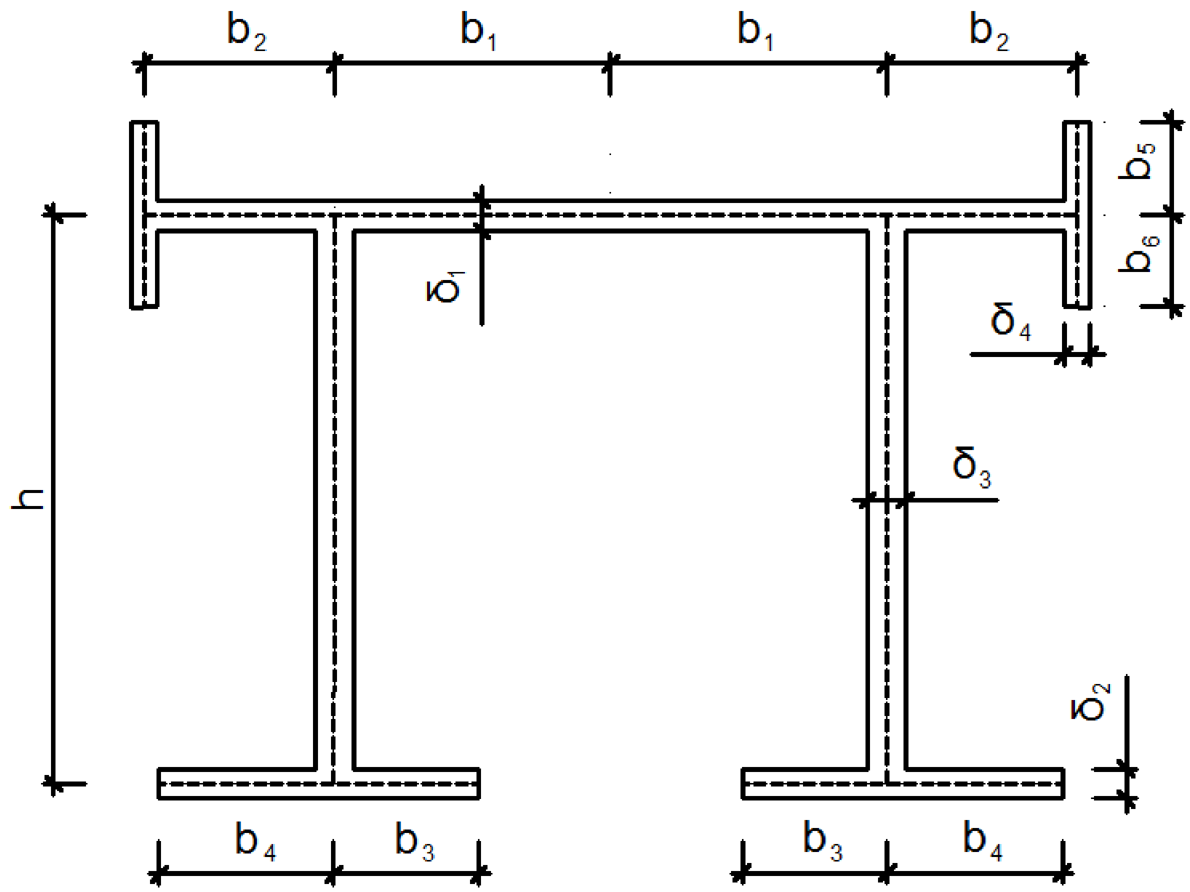
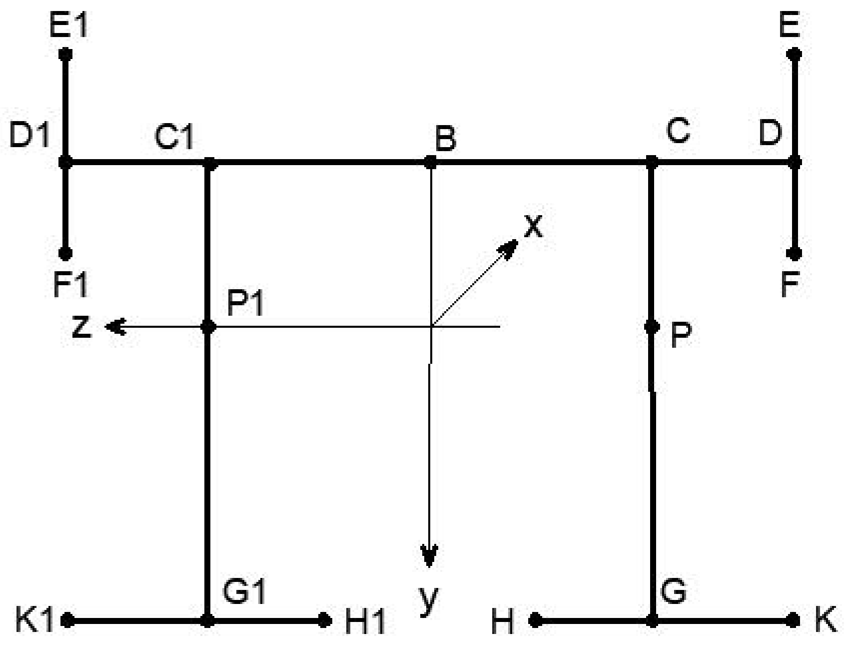
Пространственный расчет тонкостенного стержня открытого профиля

Часть 1

Определение геометрических характеристик профиля

$м := m \quad см := 0.01 \cdot m \qquad мм := 0.001 \cdot m$





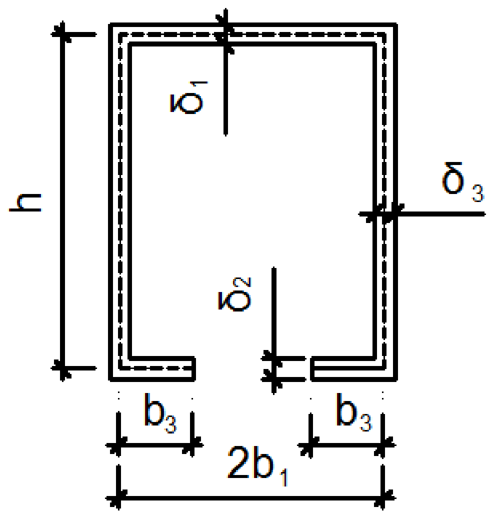
Пример

$b_1 := 22 \cdot см$ $b_2 := 0 \cdot см$ $b_3 := 10 \cdot см$ $b_4 := 0 \cdot см$

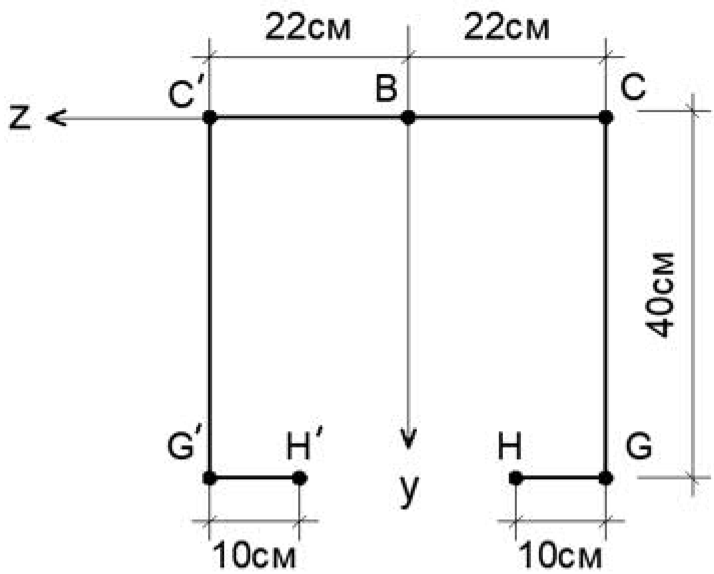
$b_5 := 0 \cdot см$ $b_6 := 0 \cdot см$ $h := 40 \cdot см$

$\delta_1 := 1.6 \cdot см$ $\delta_2 := 1.6 \cdot см$ $\delta_3 := 1.6 \cdot см$ $\delta_4 := 0 \cdot см$ $\delta := 1.6 \cdot см$

Швеллер с отгибами



Определение положения центра тяжести
Зададимся исходными осями координат

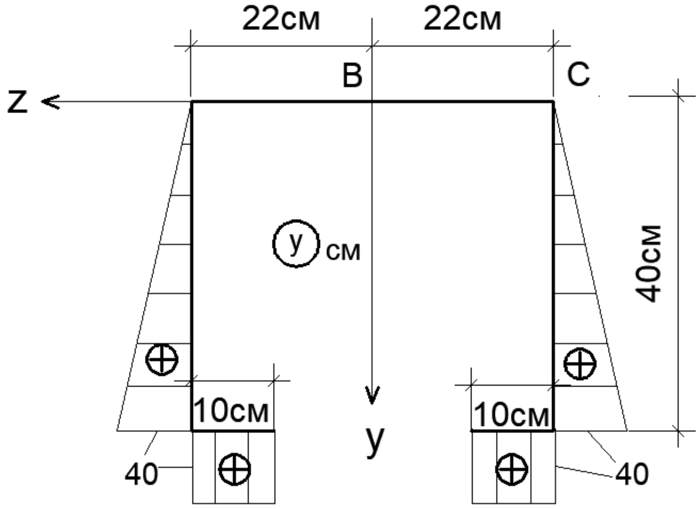


$$S_z = \int_A y \cdot dA = \sum_i \int_{S_i} y \cdot \delta_i \cdot ds = \delta \cdot \sum_i \int_{S_i} y \cdot ds \qquad A = \int_A dA = \int_S \delta \cdot ds = \sum_i \delta_i \cdot S_i = \delta \cdot \sum_i S_i = \delta \cdot S$$

Здесь $\int_{s_i} \mathbf{y} \cdot \mathbf{ds}$ - площадь эпюры y на i-ом стержне контура

S -длина контура

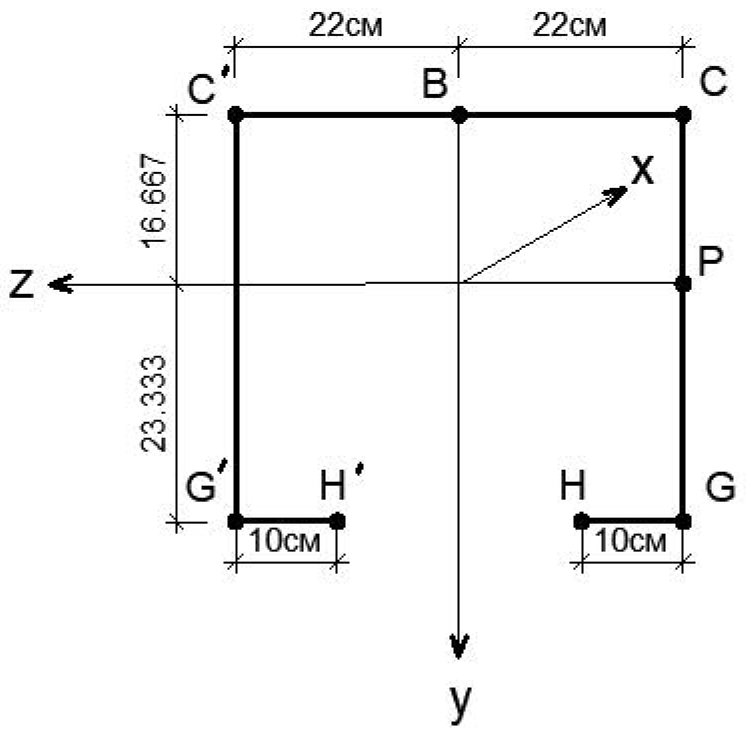
Строим эпюру y



$$S_Z := 2 \cdot 1.6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 40 + 40 \cdot 10\right) \cdot см^3 \qquad A := 1.6 \cdot 2 \cdot (22 + 40 + 10) \cdot см^2$$

$$S_Z = 3840 \cdot см^3 \quad A = 230.4 \cdot см^2$$

$$y_C := \frac{S_Z}{A} \qquad y_C = 16.667 \cdot см$$

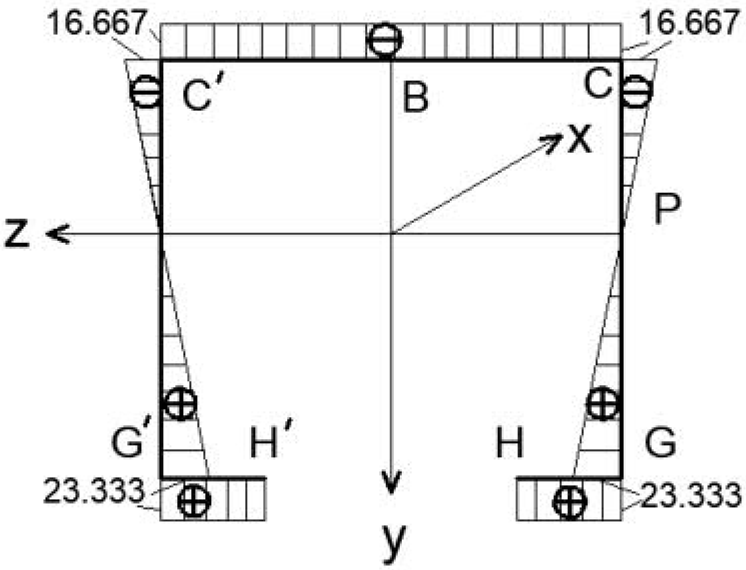


Оси y и z являются главными центральными осями инерции

$y_B := -y_c$ $\quad y_C := -y_c$ $\quad y_P := 0$ $\quad y_G := h - y_c$ $\quad y_H := y_G$

Строим эпюры главных центральных координат

Ординаты эпюры y, см; эпюра симметрична относительно оси y

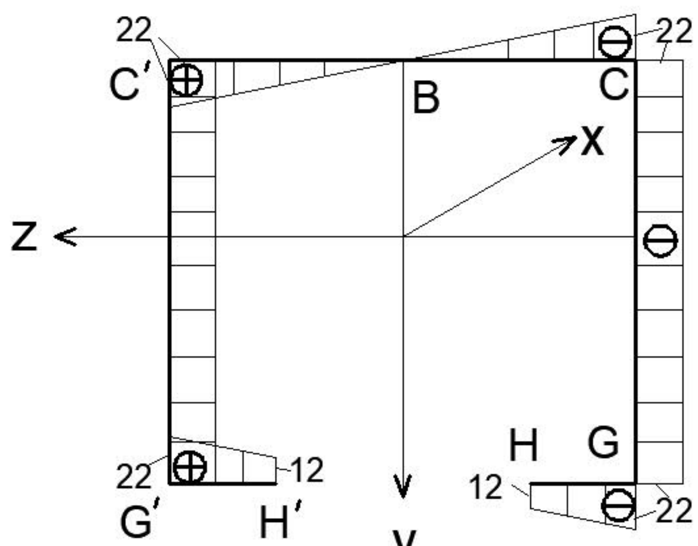


$y_B = -16.667 \cdot см$ $\quad y_C = -16.667 \cdot см$ $\quad y_P = 0 \cdot см$ $\quad y_G = 23.333 \cdot см$

$y_H = 23.333 \cdot см$

Ординаты эпюры z, см; эпюра антисимметрична относительно оси y

$z_B := 0$ $\quad z_C := -b_1$ $\quad z_G := z_C$ $\quad z_H := z_G + b_3$ $\quad z_P := 0$



$z_B = 0\cdot см$ $\quad z_C = -22\cdot см$ $\quad z_G = -22\cdot см$ $\quad z_H = -12\cdot см$

Вычисление главных центральных моментов инерции

$$\mathbf{J_{zc}} = \int_A \mathbf{y^2 dA} = \sum_i \delta_i \cdot \int_{S_i} \mathbf{y^2 ds} = \delta \cdot \sum_i \int_{S_i} \mathbf{y^2 ds} \qquad \mathbf{J_{yc}} = \int_A \mathbf{z^2 dA} = \delta \cdot \sum_i \int_{S_i} \mathbf{z^2 ds}$$

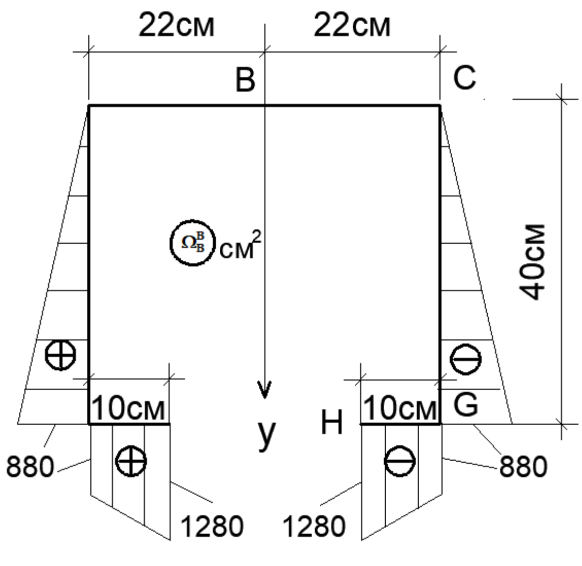
$$J_{zc} := 1.6\cdot 2\cdot\left(22\cdot 16.667^2 + \frac{1}{2}\cdot 16.667^2\cdot\frac{2}{3}\cdot 16.667 + \frac{1}{2}\cdot 23.333^2\cdot\frac{2}{3}\cdot 23.333 + 10\cdot 23.333^2\right)\cdot см^4$$

$$J_{yc} := 1.6\cdot 2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 22^2\cdot\frac{2}{3}\cdot 22 + 22\cdot 40\cdot 22 + \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 12 + \frac{1}{3}\cdot 22\right) + \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 22\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 12 + \frac{2}{3}\cdot 22\right)\right]\cdot см^4$$

$J_{zc} = 55466.667\cdot см^4$ $\qquad J_{yc} = 82824.533\cdot см^4$

Построение эпюры секториальных координат при выборе полюса и начала отсчета в т. В. Эпюра антисимметрична относительно оси y.

$$\mathbf{\Omega_B^B}$$



Если участок контурв представляет собой отрезок прямой линии, эпюра секториальных координат на этом участке изменяется по линейному закону. Поэтому их значения достаточно найти только в двух крайних точках отрезка.

$\mathbf{\Omega_B^B(C) = 0}$ $\qquad \mathbf{\Omega_B^B(G) = \Omega_B^B(C) - 22\cdot 40 = -880}\,см^2$

Это удвоенная площадь треугольника BCG, взятая со знаком минус, так как при движении точки C к точке G радиус BC вращается по часовой стрелке.

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{B}}(\mathrm{H}) = \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{B}}(\mathrm{G}) - \mathbf{10}\cdot\mathbf{40} = -\mathbf{880} - \mathbf{400} = -\mathbf{1280}\,\text{см}^2$$

Аналогичные построения для левой половины контура приводят к таким же числом, но со знаком плюс.

Определение положения центра изгиба

$$\mathbf{y_A} = \mathbf{y_B} - \frac{\mathbf{J}_{\omega_B^B y}}{\mathbf{J_y}} = \mathbf{y_B} - \frac{\int\limits_S \omega_B^B\, \mathbf{z}\,\delta\, \mathbf{ds}}{\mathbf{J_y}} = \mathbf{y_B} - \frac{\delta\int\limits_S \omega_B^B\, \mathbf{z}\, \mathbf{ds}}{\mathbf{J_y}}$$

Интеграл вычисляем по правилу Верещагина

$$2\left[\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 880\cdot 22 + \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 10\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 1280 + \frac{1}{3}\cdot 880\right) + \frac{1}{2}\cdot 22\cdot 10\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1280 + \frac{2}{3}\cdot 880\right)\right] = 1134933.333$$

$$y_A := \left(-16.667 - \frac{1.6\cdot 1134933.333}{82824.533}\right)\cdot\text{см} = -38.592\cdot\text{см}$$

$$AB := \frac{1.6\cdot 1134933.333}{82824.533}\cdot\text{см} \qquad AB = 21.925\cdot\text{см}$$

Момент инерции чистого кручения

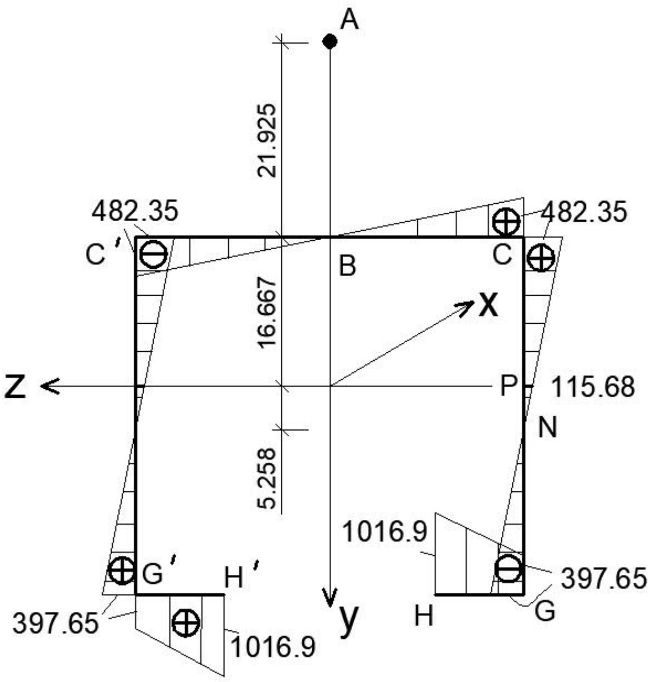
$$J_k = \frac{1}{3}\cdot\left[\sum_i \left(\delta_i{}^3\cdot b_i\right)\right] = \frac{\delta^3}{3}\cdot\sum_i b_i$$

$$J_k := 2\cdot\frac{1.6^3}{3}\cdot(22 + 40 + 10)\cdot\text{см}^4$$

$$J_k = 196.608\cdot\text{см}^4$$

Эпюра главных секториальных координат

Эта эпюра антисимметрична относительно оси y



$\omega_B := 0 \qquad \omega_C := AB \cdot b_1 \qquad \omega_C = 482.34 \cdot см^2$

$\omega_P := \omega_C - 22 \cdot 16.667 \cdot см^2 \qquad \omega_P = 115.67 \cdot см^2 \qquad \omega_N := 0$

$CN := AB \qquad PN := CN - y_c \qquad PN = 5.258 \cdot см \qquad y_N := PN$

$\omega_G := \omega_C - b_1 \cdot h \qquad \omega_G = -397.659 \cdot см^2$

$\omega_H := \omega_G - 10 \cdot (40 + 21.925) \cdot см^2 \qquad \omega_H = -1016.909 \cdot см^2$

Проверка: секториальный центробежный момент инерции в главных секториальных координатах должен равняться нулю

$$\mathbf{J}_{\omega y} = \int_A \omega\, z\, d A = \delta \int_S \omega\, z\, d s \quad \text{и} \quad \mathbf{J}_{\omega z} = \int_A \omega\, y\, d A = \delta \int_S \omega\, y\, d s$$

$$JP_{\omega y} := 2 \cdot 1.6 \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 482.35 \cdot \frac{2}{3} \cdot 22 - \frac{482.35 - 397.65}{2} \cdot 40 \cdot 22 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1016.9 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 12 + \frac{1}{3} \cdot 22 \right) \ldots \\ + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 397.65 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 12 + \frac{2}{3} \cdot 22 \right) \right]$$

$$JP_{\omega y} := 3.2 \cdot (-115087.133 + 115076.333) \rightarrow -34.56 \qquad \frac{34.56}{115087.133 \cdot 3.2} = 9.4 \times 10^{-3} \cdot \%$$

Главный секториальный момент инерции

$$\mathbf{J_{\omega} = \int_{A} \omega^2\, dA = \int_{S} \omega^2 \,\delta\, ds = \delta \int_{S} \omega^2\, ds}$$

$16.667 + 5.258 = 21.925$

$40 - 21.925 = 18.075$

$$J_{\omega} := 2\cdot 1.6\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 22\cdot 482.35\cdot\frac{2}{3}\cdot 482.35 + \frac{1}{2}\cdot 482.35\cdot 21.925\cdot\frac{2}{3}\cdot 482.35 + \frac{1}{2}\cdot 18.075\cdot 397.65\cdot\frac{2}{3}\cdot 397.65\ \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 1016.9\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 1016.9 + \frac{1}{3}\cdot 397.65\right) + \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 397.65\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 397.65 + \frac{1}{3}\cdot 1016.9\right)\right]$$

$J_{\omega} := J_{\omega}\cdot см^6$

$J_{\omega} = 30979829.7\cdot см^6$

$\mathbf{S_{\omega}^{\Omega}}$, см^4

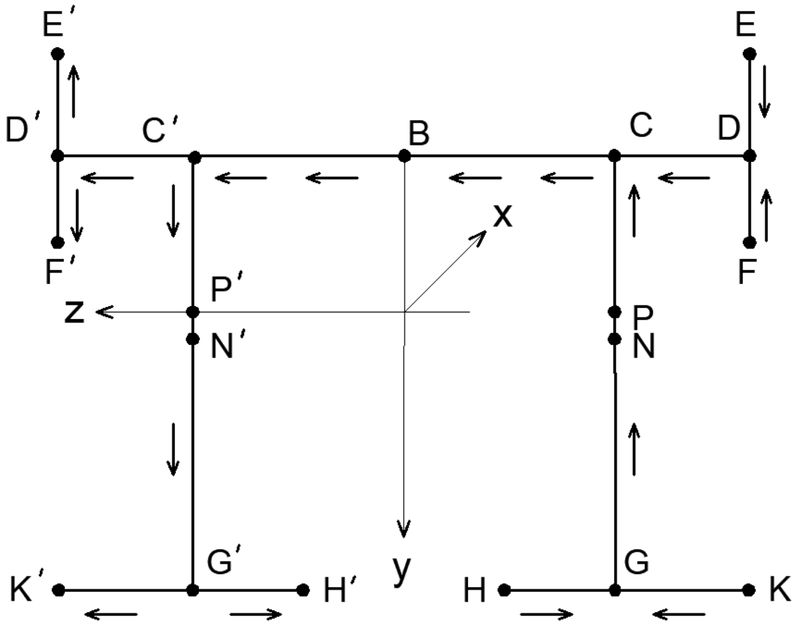
Секториальный статический момент отсечённой части эпюры ω, см^4:

(входим в узел по стрелке - берём площадь с тем знаком,
плюсом, как получается по эпюре;
входим в узел против стрелки - берём площадь с минусом)
Эпюра симметрична относительно оси y.

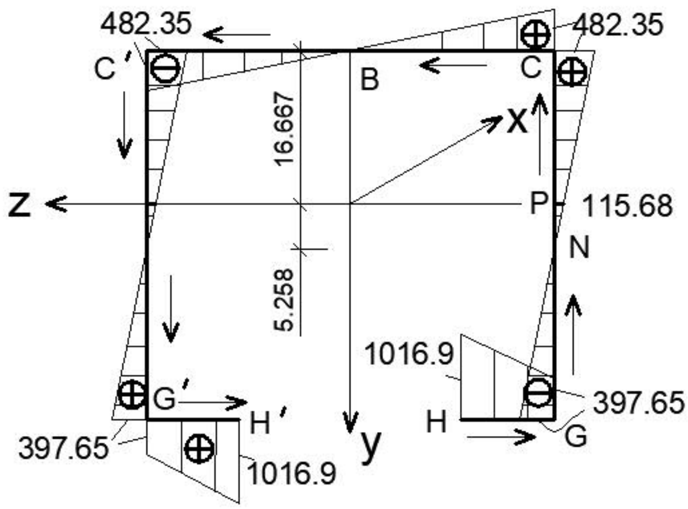
$$\mathbf{S_{\omega}^{\Omega} = \int_{\Omega} \omega\, dA = \int_{0}^{s} \omega\,\delta\, ds = \delta\int_{0}^{s} \omega\, ds}$$

Интеграл $\int_{0}^{s} \omega\, ds$ представляет собой площадь отсечённой части эпюры ω

При выборе отсеченных частей будем использовать показанное на рисунке направление обхода контура



Воспользуемся эпюрой главных секториальных координат



Точка H $\quad S_{\omega H} := 0$

Середина отрезка GH $\quad \dfrac{1016.9 + 397.65}{2} = 707.275$

$$S_{\omega} := -\frac{1016.9 + 707.275}{2} \cdot 5 \cdot 1.6 \cdot \text{см}^4 \qquad S_{\omega} = -6896.7 \cdot \text{см}^4$$

Точка G $\quad S_{\omega G} := -10 \cdot 1.6 \cdot \dfrac{1016.9 + 397.65}{2} \cdot \text{см}^4 \qquad S_{\omega G} = -11316.4 \cdot \text{см}^4$

Точка N $\quad S_{\omega N} := S_{\omega G} - 1.6 \cdot (40 - 5.258 - 16.667) \cdot 397.65 \cdot 0.5 \cdot \text{см}^4$

$$S_{\omega N} = -17066.4 \cdot \text{см}^4$$

Точка P

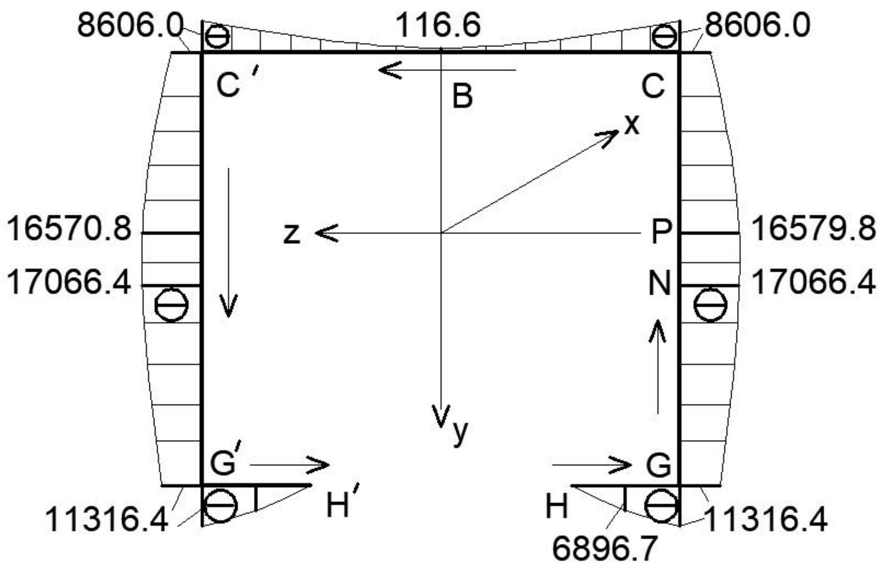
$$S_{\omega P} := S_{\omega N} + 1.6 \cdot 0.5 \cdot 5.258 \cdot \frac{482.35 \cdot 5.258}{5.258 + 16.667} \cdot \text{см}^4 \qquad S_{\omega P} = -16579.8 \cdot \text{см}^4$$

Точка C

$$S_{\omega C} := S_{\omega G} + 1.6\cdot(482.35 - 397.65)\cdot 0.5\cdot 40\cdot \text{см}^4 \qquad S_{\omega C} = -8606\cdot \text{см}^4$$

Точка B

$$S_{\omega B} := S_{\omega C} + 1.6\cdot 0.5\cdot 22\cdot 482.35\cdot \text{см}^4 \qquad S_{\omega B} = -116.6\cdot \text{см}^4$$



Эпюра статичеких моментов отсеченной части S_z

Статический момент отсеченной части сечения относительно оси z_C, см^3:

Эпюра симметрична относительно оси y.

На горизонтальных участках эпюра изменяется по линейному закону, на вертикальных участках - по параболе.

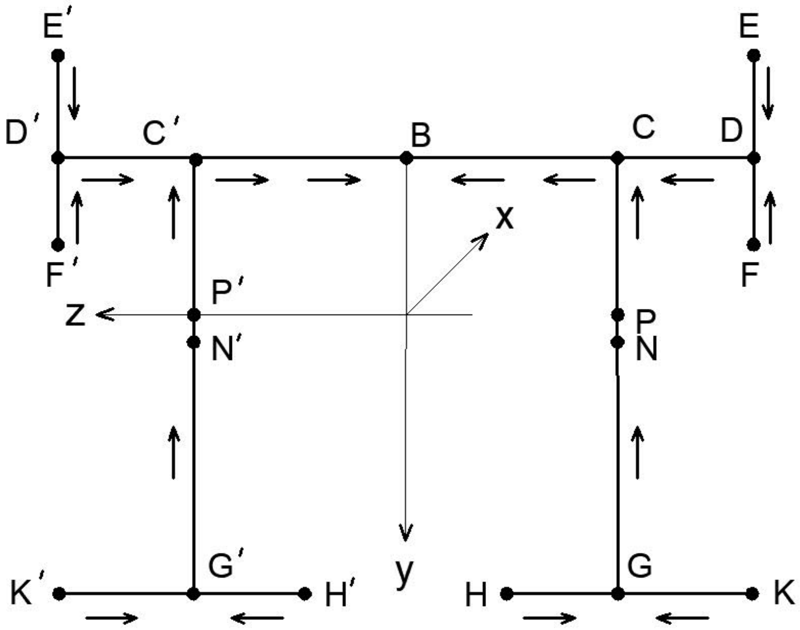
$$\mathbf{S_z^\Omega = \int_\Omega y \cdot dA = \delta \int_s y \cdot ds}$$

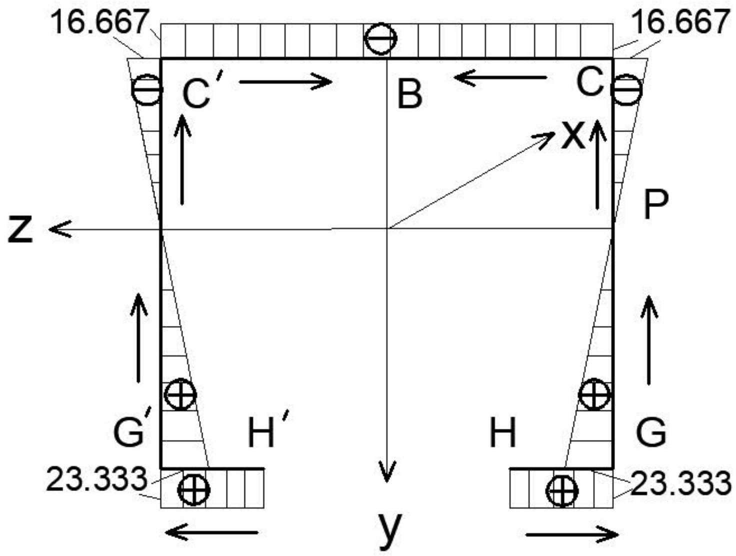
Интеграл $\int_s \mathbf{y \cdot ds}$ проеставляет собой площадь соответствующего участка эпюры y.

Сначала укажем на эпюре y направление обхода контура.

Если стрелки слева направить также как стрелки справа, эпюра будет симметрична относительно оси y.

При выборе отсеченных частей будем использовать показанное на рисунке направление обхода контура.





$S_{zH} := 0 \qquad S_{zG} := 1.6 \cdot 23.333 \cdot 10 \cdot \text{см}^3 \qquad S_{zG} = 373.33 \cdot \text{см}^3$

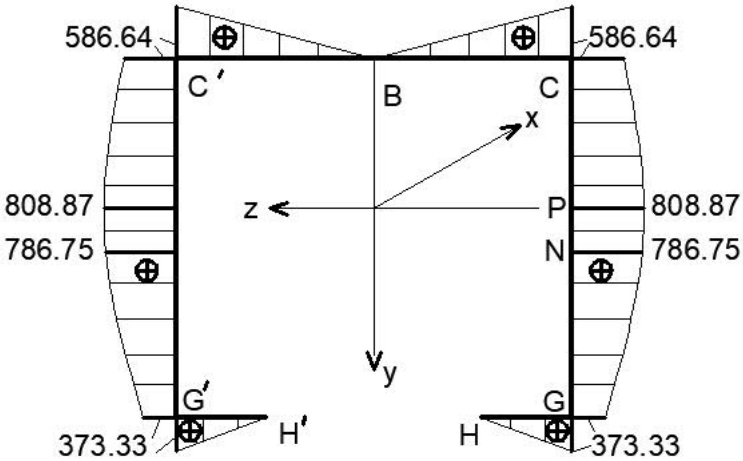
$S_{zP} := S_{zG} + \frac{1}{2} \cdot 23.333^2 \cdot 1.6 \cdot \text{см}^3 \qquad S_{zP} = 808.87 \cdot \text{см}^3$

$S_{zN} := S_{zP} - \frac{1}{2} \cdot 5.258^2 \cdot 1.6 \cdot \text{см}^3 \qquad S_{zN} = 786.75 \cdot \text{см}^3$

$S_{zC} := S_{zG} + \frac{(23.333 - 16.667)}{2} \cdot 40 \cdot 1.6 \cdot \text{см}^3 \qquad S_{zC} = 586.64 \cdot \text{см}^3$

$S_{zB} := S_{zC} - 22 \cdot 16.667 \cdot 1.6 \cdot \text{см}^3 \qquad S_{zB} = -0.038 \cdot \text{см}^3$

$S_{zB} := 0$


586.64
586.64
C′
B
C
x
808.87
z
P
808.87
786.75
N
786.75
y
G′
G
373.33
H′
H
373.33